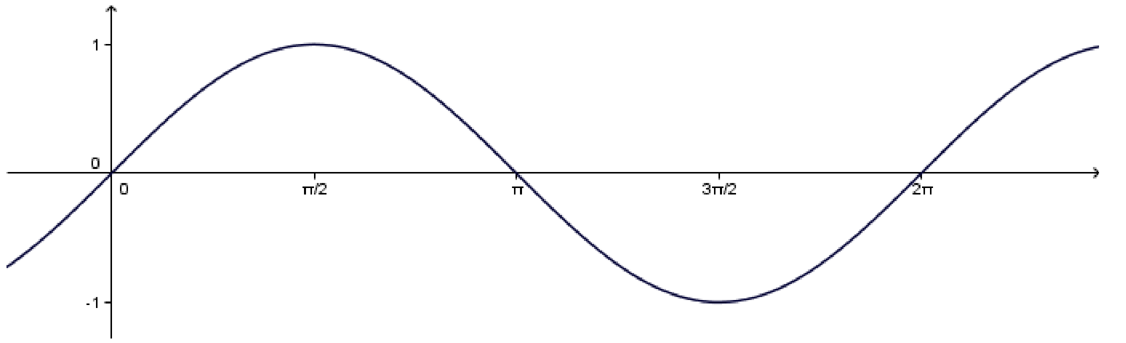
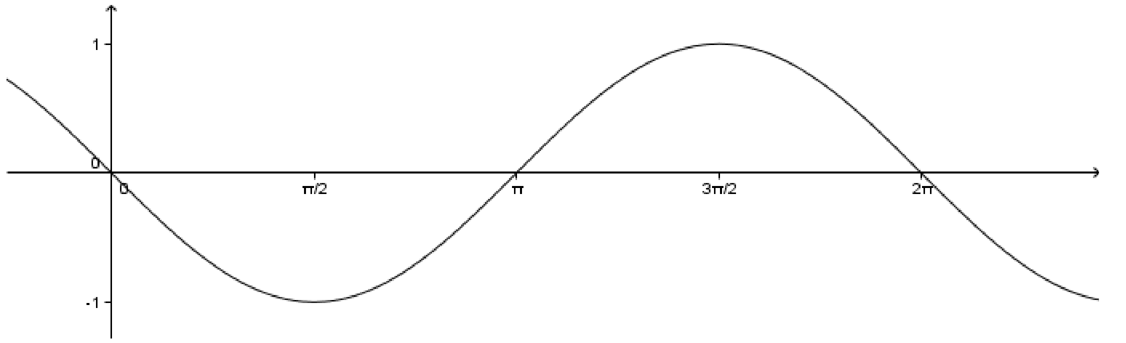
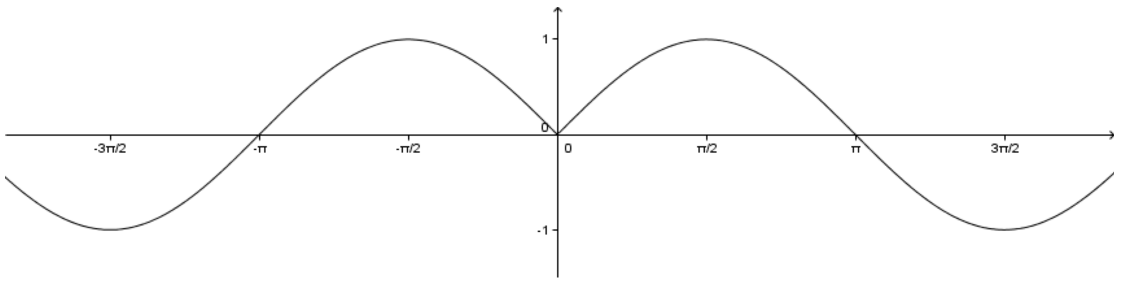
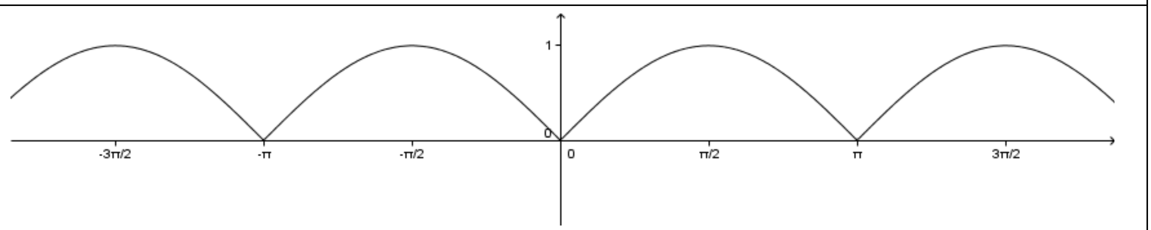
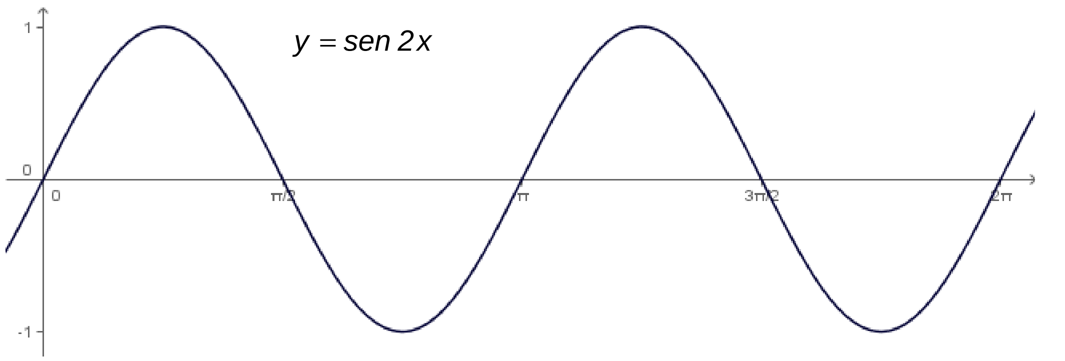
Grafici di funzioni goniometriche

Grafici deducibili

$y = \text{sen } x$	
$y = \text{sen}(-x)$ $\Leftrightarrow$ $y = -\text{sen } x$	
$y = -\text{sen }\lvert x\rvert$	
$y = \lvert\text{sen } x\rvert$	

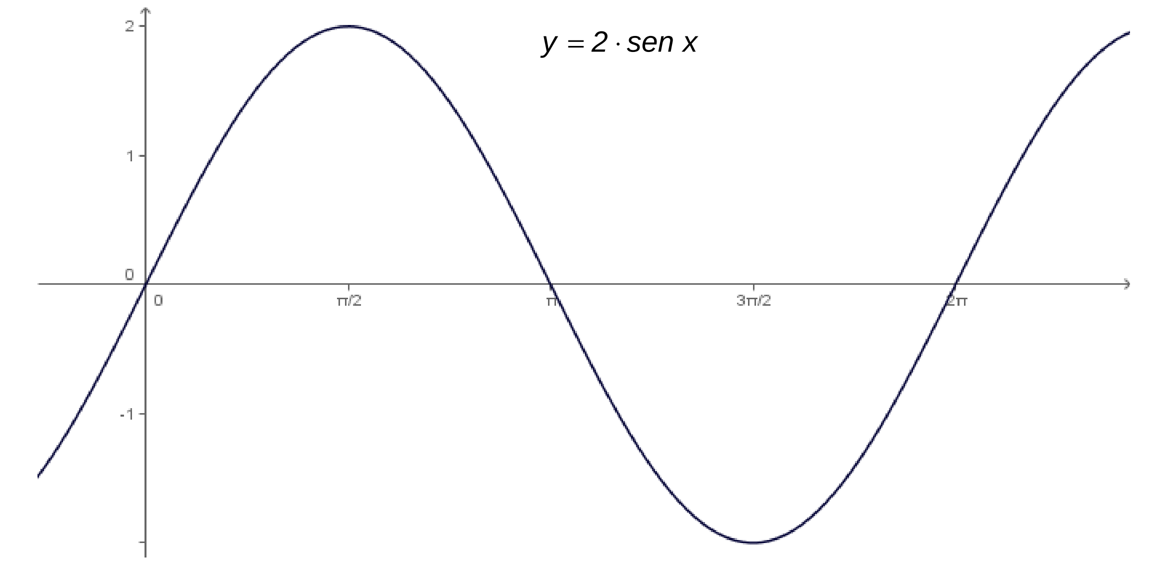
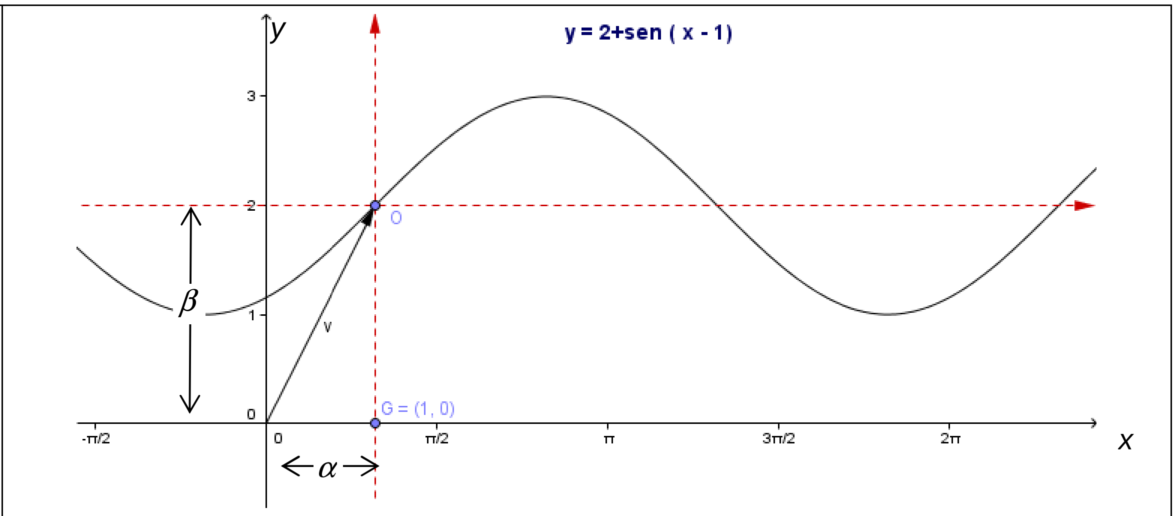
$y = \text{sen } bx$ con periodo $T = \dfrac{2\pi}{b}$	

Nota

La funzione $y = \text{sen } bx$ *è definita* $\forall x \in R$ *con periodo* $T = \dfrac{2\pi}{b}$

Infatti deve risultare: $\text{sen } bx = \text{sen } b(x+T)$; $\text{sen } bx = \text{sen}(bx + bT)$;

nella quale deve risultare: $bT = 2\pi$; *cioè:* $T = \dfrac{2\pi}{b}$.

$y = a \cdot sen\ x$ *codominio:* $[-a, a]$	
$y = \beta + sen(x - \alpha)$ $y - \beta = sen(x - \alpha)$ $T \begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$ $T^{-1} \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$ $\vec{v}\,(\alpha; \beta)$	

$y = A\,\text{sen}\,(\omega x + \gamma) + c$

La funzione: $y = A\,\text{sen}\,(\omega x + \gamma) + c$ si trasforma in: $y - c = A\,\text{sen}\,\omega \cdot \left(x + \frac{\gamma}{\omega} \right)$.

Ponendo $T : \begin{cases} X = x + \frac{\gamma}{\omega} \\ Y = y - c \end{cases}$ si ottiene: $\boxed{Y = A\,\text{sen}\,\omega X}$

$\frac{\gamma}{\omega}$ = fase dell'onda

A = ampiezza dell'onda (escursione della curva lungo l'asse y, cioè $-A \le y \le A$).

Per $A > 1$	si ha una dilatazione lungo l'asse y
Per $0 < A < 1$	si ha una contrazione lungo l'asse y
Se $A < 0$	oltre a variare l'ampiezza, le ordinate si invertono di segno
ω = pulsazione	il periodo dell'onda è $T = \frac{2\pi}{\omega}$
Per $\omega > 1$	si ha una contrazione lungo l'asse x
Per $0 < \omega < 1$	si ha una dilatazione lungo l'asse x
Se $\omega < 0$	il periodo non cambia ma inverte le ordinate della funzione seno $\text{sen}(-2x) = -\text{sen}2x$.

Il valore massimo della funzione si ottiene ponendo: $\text{sen}\,(\omega x + \gamma) = 1$. Per cui esso vale: $y = A \cdot 1 + c$.

Tale valore massimo si ottiene per: $\omega x + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Il valore minimo della funzione si ottiene ponendo: $\text{sen}\,(\omega x + \gamma) = -1$. Per cui esso vale: $y = A \cdot (-1) + c$.

Tale valore minimo si ottiene per: $\omega x + \gamma = \frac{3}{2}\pi$.

$y = a\,\text{sen}\,x + b\cos y + c$

La funzione: $y = a\,\text{sen}\,x + b\cos x + c$ si trasforma nell'equazione: $\boxed{y = A\,\text{sen}\,(x + \gamma) + c}$

ponendo: $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\tan\gamma = \frac{b}{a}$.

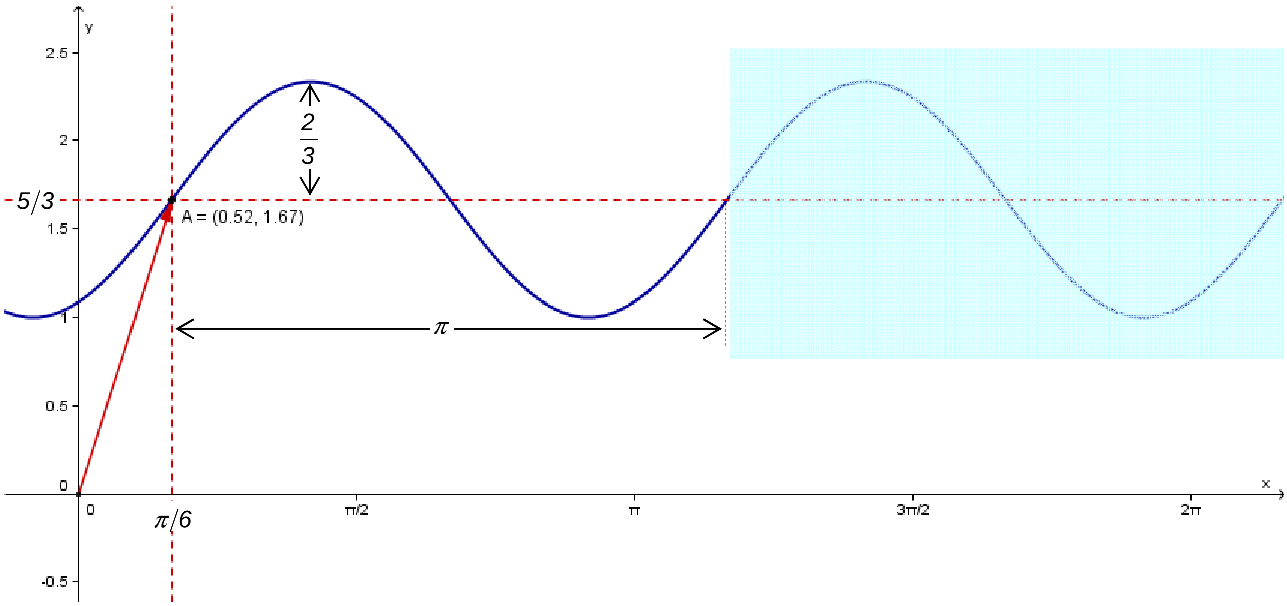
Esempio

Tracciare il grafico della funzione: $y=\frac{2}{3}sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{3}$

La funzione: $y=\frac{2}{3}sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{3}$ *si trasforma in:* $y-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}sen\,2\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Ponendo $T:\begin{cases}X=x-\frac{\pi}{6}\\ Y=y-\frac{5}{3}\end{cases}$ *si ottiene:* $\boxed{Y=\frac{2}{3}sen\,2X}$

$$\begin{tikzcd}
 & y-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}sen2\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \arrow[dr, bend left] & \\
T^{-1}\begin{cases}x=X+\frac{\pi}{6}\\ y=Y+\frac{5}{3}\end{cases} \arrow[ur, bend left] & & T\begin{cases}X=x-\frac{\pi}{6}\\ Y=y-\frac{5}{3}\end{cases} \arrow[dl, bend left] \\
 & Y=\frac{2}{3}sen\,2X \arrow[ul, bend left] &
\end{tikzcd}$$



Il valore massimo della funzione si ottiene ponendo: $sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$. *Per cui esso vale:* $y=\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$.

Tale valore massimo si ottiene per: $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$; $2x=\frac{5}{6}\pi$; $x=\frac{5}{12}\pi=75°$.

Il valore minimo della funzione si ottiene ponendo: $sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$. *Per cui esso vale:* $y=\frac{2}{3}\cdot(-1)+\frac{5}{3}=1$.

Tale valore minimo si ottiene per: $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$; $2x=\frac{1}{6}\pi$; $x=\frac{11}{12}\pi=165°$