LA PROBABILITÀ

Introduzione

Il calcolo delle probabilità è la parte della matematica che si occupa di prevedere quanto un evento casuale sia probabile.

Dal punto di vista storico il primo matematico che si occupò di questo aspetto fu Blaise Pascal (1623-1662). Pascal enunciò i fondamenti di questo calcolo che furono ripresi e ampliati più tardi da altri matematici come Jakob Bernoulli che scoprì la Legge dei grandi numeri.

Il lancio di una moneta, l'estrazione di un numero al lotto, il lancio di un dado sono fenomeni il cui esito dipende in modo imprevedibile dal caso. Questi fenomeni sono detti **esperimenti aleatori**.

Spazio Campionario

Lo **spazio campionario** di un esperimento aleatorio è l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento aleatorio.

Un **evento aleatorio** è un sottoinsieme dello spazio campionario.

Esempio

Nell'esperimento aleatorio "*lancio di un dado*",
lo spazio campionario è l'insieme dei 6 numeri del dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

L'evento aleatorio $\mathrm{E} = "Esce\ un\ divisore\ di\ 6"$ è il sottoinsieme $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 6\}$.

L'evento **contrario** $\overline{\mathrm{E}} = "Non\ esce\ un\ divisore\ di\ 6"$ è il sottoinsieme $\overline{\mathrm{E}} = \{4, 5\}$

L'evento $\mathrm{A} = "Esce\ un\ numero\ maggiore\ di\ zero"$ è un **evento certo**.

L'evento $\mathrm{B} = "Esce\ il\ numero\ 7"$ è un **evento impossibile**.

Probabilità di un evento (Definizione classica – Laplace)

La probabilità di un evento è il rapporto:	$P(E) = \dfrac{n° \; casi \; favorevoli}{n° \; casi \; possibili}$

Esempio

Riprendendo l'esempio precedente del lancio di un dado:

$P(E) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$	$P(\bar{E}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$	$P(A) = \dfrac{6}{6} = 1$	$P(B) = \dfrac{0}{6} = 0$

Probabilità dell'evento contrario

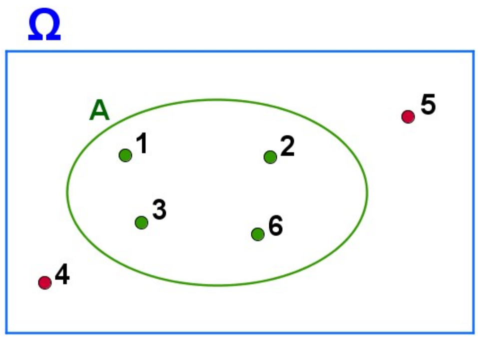
La probabilità dell'evento contrario è: $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

Esempio

Riprendendo l'esempio precedente del lancio di un dado:

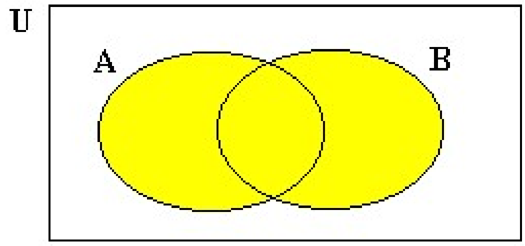
$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Rappresentazione insiemistica

La **rappresentazione insiemistica** dell'esperimento aleatorio è rappresentata a lato:	

Evento unione

La Dati gli eventi A e B, relativi allo stesso spazio degli eventi, il loro **evento unione**, $\boldsymbol{A \cup B}$, è quell'evento che si verifica al verificarsi di almeno uno degli eventi dati.



Esempio

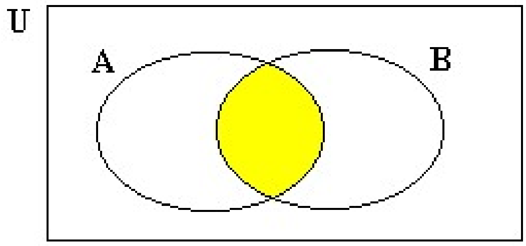
Nell'esperimento aleatorio "estrazione di una carta da un mazzo di carte napoletane", consideriamo gli eventi:

A = "Esce una carta di bastoni" e B = "Esce una figura" .

L'evento unione è l'evento $A \cup B$ = "Esce una carta di bastoni o una figura".

Evento intersezione

La Dati gli eventi A e B, relativi allo stesso spazio degli eventi, il loro **evento intersezione**, $\boldsymbol{A \cap B}$, è quell'evento che si verifica quando si verificano contemporaneamente gli eventi dati.



Esempio

Nell'esperimento aleatorio "estrazione di una carta da un mazzo di carte napoletane", consideriamo gli eventi:

A = "Esce una carta di bastoni" e B = "Esce una figura".

L'evento intersezione è l'evento $A \cap B$ = "Esce una figura di bastoni".

Eventi compatibili e eventi incompatibili

Due eventi **A** e **B** di uno stesso spazio campionario si dicono **incompatibili** se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro. La loro intersezione $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$.

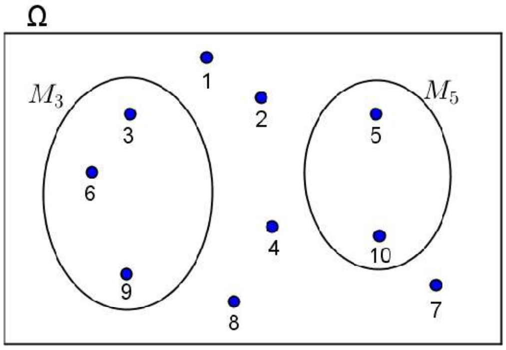
Due eventi **A** e **B** di uno stesso spazio campionario si dicono **compatibili** se il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro. La loro intersezione $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \neq \emptyset$.

Teorema della somma o Teorema della probabilità totale

La probabilità dell'evento **Unione** di due eventi **A** e **B** è :

$$\boldsymbol{P(A \cup B)} = \begin{cases} \boldsymbol{P(A) + P(B)} & \textit{se } A \textit{ e } B \textit{ sono incompatibili} \\ \boldsymbol{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} & \textit{se } A \textit{ e } B \textit{ sono compatibili} \end{cases}$$

Esempio - Eventi incompatibili



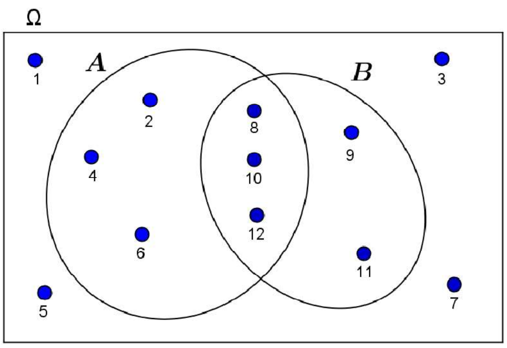
Un'urna contiene 10 palline numerate. Calcolare la probabilità che, estraendo una pallina a caso, esca un multiplo del 3 o un multiplo del 5.

Gli insiemi che rappresentano i due eventi sono:

$M_3 = \{3, 6, 9\}$ e $M_5 = \{5, 10\}$.

$$P(M_3 \cup M_5) = P(M_3) + P(M_5) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10} .$$

Esempio - Eventi compatibili



Un'urna contiene 12 palline numerate. Calcolare la probabilità che, estraendo una pallina a caso, esca un numero pari o un numero maggiore di 7.

Gli insiemi che rappresentano i due eventi sono:

$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e $S = \{8, 9, 10, 11, 12\}$.

$$P(P \cup S) = P(P) + P(S) - P(P \cap S) = \frac{6}{12} + \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8}{12} .$$

Probabilità condizionata

La **probabilità condizionata** rappresenta il calcolo della probabilità di un evento **A**, sapendo che si è verificato un evento **B**.	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

L'informazione aggiuntiva che deriva dal sapere che si è verificato l'evento B può modificare la probabilità che si verifichi l'evento A.

Eventi dipendenti - $P(A) \neq P(A/B)$

Consideriamo il seguente esperimento aleatorio:

Estrazione di una pallina numerata da un sacchetto contenente 12 palline numerate

Consideriamo l'evento A = "Esce un multiplo di 3".

L'insieme che rappresenta l'evento è $A = \{3, 6, 9, 12\}$.

La probabilità $P(\mathrm{A}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Consideriamo ora l'informazione aggiuntiva:

$B =$ "È *uscito un numero minore di* 9".

Cosa si può dire ora della probabilità condizionata $P(A/B)$?

In questa nuova situazione lo spazio campionario non è più costituito dalle 12 palline dell'insieme A, ma soltanto dalle 8 palline dell'insieme B.

I casi favorevoli per A/B sono gli elementi del nuovo spazio degli eventi $A \cap B$, cioè dalle palline numero 3 e numero 6.

Quindi $P(A/B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ cioè $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/12}{8/12} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

In questo esperimento aleatorio l'informazione aggiuntiva B ha modificato la probabilità del verificarsi dell'evento A, cioè: $P(A) \neq P(A/B)$.

Eventi indipendenti - $P(A) = P(A/B)$

Consideriamo il seguente esperimento aleatorio:

Estrazione di una carta da un mazzo delle 40 carte napoletane.

Consideriamo l'evento $\mathrm{A} = "\textit{Esce un asso}"$.

L'insieme che rappresenta l'evento è $A = \{a_b, a_c, a_d, a_s\}$.

La probabilità $P(\mathrm{A}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

Consideriamo ora l'informazione aggiuntiva:

$B = "\text{È } \textit{uscita una carta di spade}"$.

Cosa si può dire ora della probabilità condizionata $P(A/B)$?

In questa nuova situazione lo spazio campionario non è più costituito dalle 40 carte, ma soltanto dalle 10 carte di spade dell'insieme B.

I casi favorevoli per A/B sono gli elementi del nuovo spazio degli eventi $A \cap B$, cioè dal solo asso di spade.

Quindi $P(A/B) = \frac{1}{10}$

In questo esperimento aleatorio l'informazione aggiuntiva B non ha modificato la probabilità del verificarsi dell'evento A, cioè: $P(A) = P(A/B)$.

Teorema del prodotto (o Teorema della probabilità composta)

La probabilità dell'evento **Prodotto** di due eventi **A** e **B** è :

$$\boldsymbol{P(A \cap B)} = \begin{cases} p(A) \cdot p(B) & \textit{se A e B sono indipendenti} \\ p(A) \cdot P(B/A) & \textit{se A e B sono dipendenti} \end{cases}$$

Esempio - Eventi indipendenti - (estrazione con reimbussolamento)

Consideriamo il seguente esperimento aleatorio:

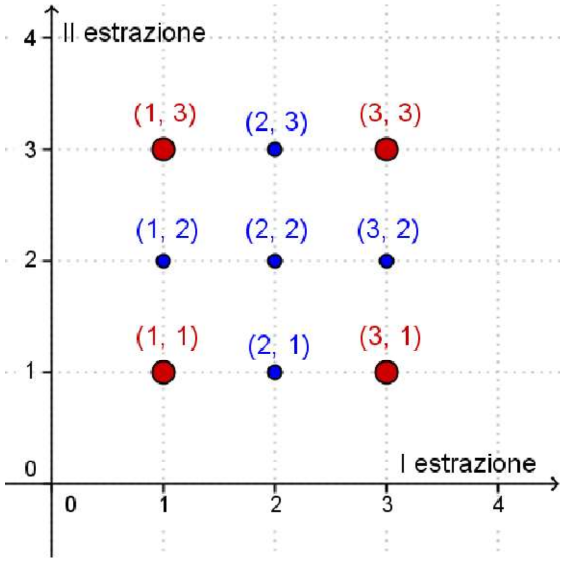
Un sacchetto contiene 3 palline numerate. Dal sacchetto estraiamo una pallina e poi una seconda pallina, dopo che la prima pallina è stata rimessa nel sacchetto.

Calcoliamo la probabilità che nelle due estrazioni successive vengono estratti due numeri dispari.

Consideriamo gli eventi:

$E_1 =$ "*Il primo numero estratto è dispari*".

$E_2 =$ "*Il secondo numero estratto è dispari*".



I due eventi E_1 e E_2 sono *indipendenti*, poiché il verificarsi dell'uno non altera la probabilità di verificarsi dell'altro. Si ha pertanto:

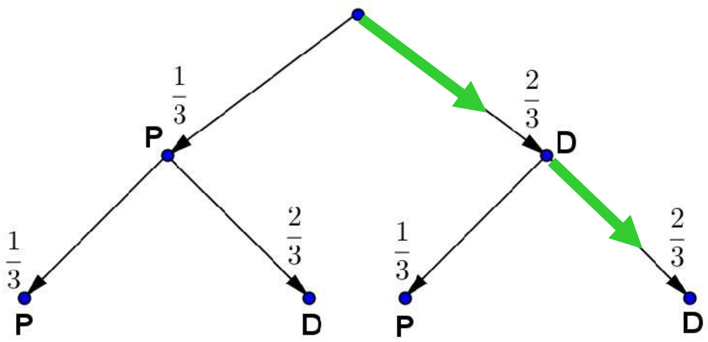
$$P(E_1) = \frac{2}{3} \qquad P(E_2) = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad P(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_1) = \frac{4}{9}.$$

Infatti dal diagramma cartesiano si ricava che lo spazio campionario è costituito dalle 9 coppie di numeri (blu/rosse), mentre i casi favorevoli sono le 4 coppie rosse.

Il problema può essere risolto anche utilizzando il diagramma ad albero.

La diramazione del livello superiore si riferisce alla prima estrazione.

Le diramazioni del livello inferiore si riferiscono alla seconda estrazione.



La probabilità richiesta si ottiene moltiplicando le probabilità delle due frecce verdi.

$$P(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) = \frac{4}{9}$$

Esempio - Eventi dipendenti - (estrazione senza reimbussolamento)

Consideriamo il seguente esperimento aleatorio:

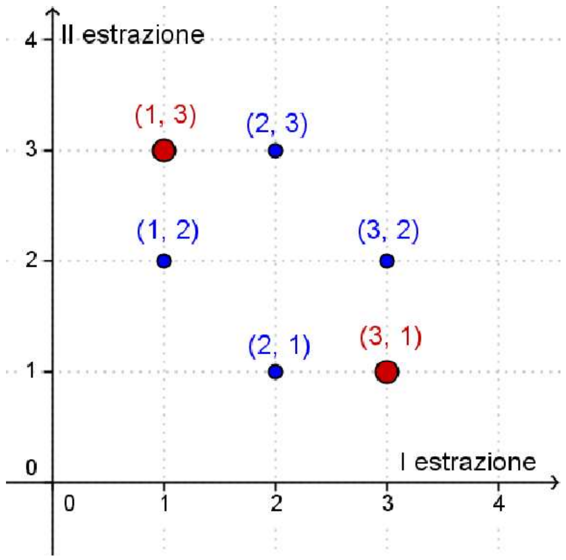
Un sacchetto contiene 3 palline numerate. Dal sacchetto estraiamo una pallina e poi una seconda pallina, senza rimettere la prima nel sacchetto.

Calcoliamo la probabilità che nelle due estrazioni successive vengono estratti due numeri dispari.

Consideriamo gli eventi:

$E_1 =$ "*Il primo numero estratto è dispari*".

$E_2 =$ "*Il secondo numero estratto è dispari*".



In questo caso però, i due eventi E_1 e E_2 sono dipendenti, poiché il verificarsi del primo evento altera la probabilità di verificarsi del secondo.

$$P(E_1) = \frac{2}{3} \qquad P(E_2/E_1) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad P(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot P(E_2/E_1) = \frac{1}{3}.$$

Nel diagramma cartesiano lo spazio campionario è costituito soltanto dalle 6 coppie di numeri diversi. Trattandosi di una estrazione senza reimbussolamento il numero estratto non può essere estratto di nuovo (non ci sono le coppie di numeri uguali).

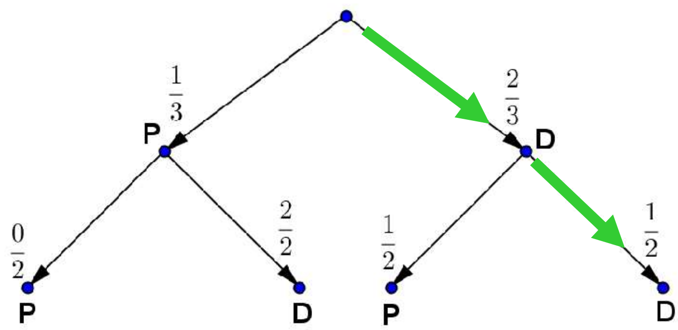
I casi favorevoli sono soltanto le due coppie rosse: $(1; 3)$, $(3; 1)$.

Pertanto la probabilità è: $P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Il problema può essere risolto anche utilizzando il diagramma ad albero.

La diramazione del livello superiore si riferisce alla prima estrazione.

Le diramazioni del livello inferiore si riferiscono alla seconda estrazione.



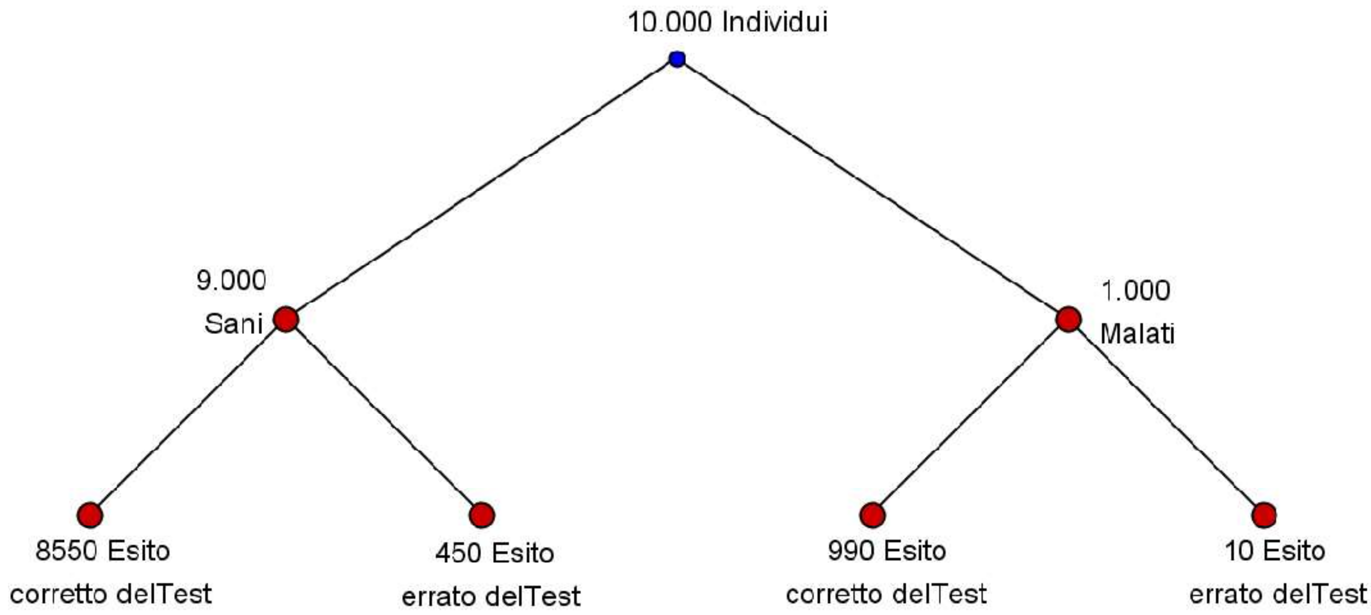
La probabilità richiesta si ottiene moltiplicando le probabilità delle due frecce verdi.

$$P(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot P(E_2/E_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

Quesito D6

Su una popolazione di 10 individui il 10% è affetto da una malattia, mentre il 90% è sano. Il test che diagnostica la presenza della malattia è affidabile solo parzialmente: nel 5% dei casi rileva la malattia su un individuo sano e nell'1% dei casi non rileva la malattia su un individuo malato. Il diagramma riassume la situazione:

Soluzione 1



Utilizzando i dati del diagramma ad albero, completa la seguente tabella.

	Esito corretto del test	Esito errato del test	Totale
Sani	8550	450	9.000
Malati	990	10	1.000
Totale	9540	460	10.000

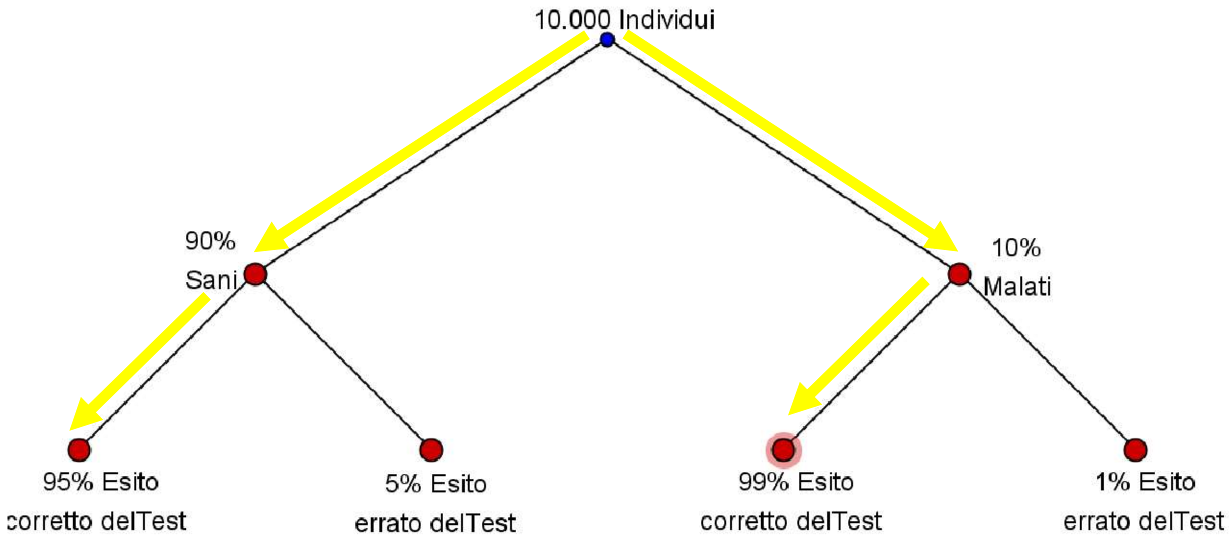
a. Qual è la probabilità che l'esito del test sia corretto per una persona scelta a caso da quella popolazione ?

$$P(Esito\ corretto) = \frac{9540}{10000} = 0{,}954 = 95{,}4\%$$

b. Qual è la probabilità che un individuo, preso a caso tra tutti quelli che hanno avuto un esito corretto al test, sia sano?

$$P(Sano/Corretto) = \frac{8550}{9540} \cong 0{,}896 \cong 89{,}6\%\ .$$

Soluzione 2



$$P(Esito\ corretto) = \frac{90}{100} \cdot \frac{95}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{99}{100} = \frac{8550}{10000} + \frac{990}{10000} = \frac{954}{10000}\ .$$