COEFFICIENTI BINOMIALI

Il coefficiente binomiale è definito dalla seguente espressione: $\binom{n}{k} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$

Proprietà

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\qquad \binom{n}{1} = n$ $\qquad \binom{n}{n-1} = n$

Esempi

$\binom{5}{0} = 1$ $\qquad \binom{5}{5} = \dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 1$ $\qquad \binom{5}{1} = \dfrac{5}{1} = 5$ $\qquad \binom{5}{4} = \dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5$ $\qquad \binom{5}{3} = \dfrac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$

Legge dei tre fattoriali

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}} \qquad \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\cdot5!}$$

Legge delle classi complementari

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}} \qquad \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

La formula di Stiefel

La formula di **Stiefel** permette di costruire il triangolo di Tartaglia: ciascun coefficiente intermedio è espresso dalla somma dei due che lo sovrastano, a destra e a sinistra , nella riga precedente.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}} \qquad \binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$$

La formula di Ricorrenza

La formula di **Ricorrenza** consente di programmare facilmente su un computer il calcolo dei coefficienti binomiali in quanto la determinazione degli stessi con la formula della definizione non sempre è effettuabile quando $n!$ supera la capacità della macchina.

$$\boxed{\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}} \qquad \binom{8}{4} = \binom{8}{3}\cdot\frac{5}{4}$$

LA FORMULA DI GAUSS

La formula di Gauss $\boxed{S_n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}}$ permette di calcolare la somma dei primi n numeri interi.

<u>Dimostrazione</u>

Infatti se ad esempio volessimo calcolare la somma dei primi 100 numeri interi, basta considerare le 50 coppie del tipo 1+100, 2+99, 3+98, ecc… Queste coppie sono $50 = \dfrac{n}{2}$ *e la loro somma è* $101 = n+1$.

Esempio

La somma dei primi 5 numeri interi è: $S_5 = \dfrac{5\cdot(5+1)}{2} = 15$.