PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

27 novembre 2014

Testo 1

1) *La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice.*

Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore.
Buon lavoro e buon divertimento.

Nome _______________________ Cognome _______________________ Classe _________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) Nel paese di Gnallucci circolano quattro monete: dobloni, zecchini, talleri e fufignezi. Un doblone vale quanto uno zecchino più un tallero e un fufignezo. Due dobloni valgono quanto uno zecchino più tre talleri e cinque fufignezi. Un tale entra in un negozio con uno zecchino e ne esce con un tallero. In fufignezi, quanto ha pagato?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

2) Nell'equazione $x^2 + bx + c = 0$ si sa che $c < 0$. Allora certamente:
(A) l'equazione non ha radici reali,
(B) l'equazione ha due radici reali coincidenti,
(C) l'equazione ha una radice reale positiva e una radice reale negativa,
(D) l'equazione ha due radici reali positive,
(E) l'equazione ha due radici reali negative.

3) Un parallelogramma di perimetro $\mathcal{P} = 8$ cm ha area $\mathcal{A} = 4\sqrt{2}$ cm^2. Quanto misura il suo angolo acuto?
(A) 30°, **(B)** 45°, **(C)** 60°, **(D)** un tale parallelogramma non esiste,
(E) l'angolo non è univocamente determinabile dai dati forniti.

4) Tredici amici si ritrovano per un gioco da tavolo. Il gioco prevede che a ogni partecipante vengano distribuiti dei sesterzi, in modo che il primo giocatore riceva un sesterzo ed ogni giocatore successivo riceva un numero di sesterzi pari al doppio di quelli assegnati al giocatore precedente. Sapendo che ci sono in tutto 10000 sesterzi, quante saranno i sesterzi che resteranno non distribuiti?
(A) 0, **(B)** 32, **(C)** 205, **(D)** 951, **(E)** 1809.

5) In una certa azienda ogni dirigente percepisce uno stipendio pari a quattro volte quello di ogni operaio. Il costo complessivo che l'azienda sostiene per pagare gli stipendi di tutti i dipendenti è uguale a sei volte il costo complessivo degli stipendi di tutti i dirigenti. Quanti operai ci sono per ciascun dirigente?
(A) 5, **(B)** 6, **(C)** 20, **(D)** 24, **(E)** 30.

6) Quale di questi numeri è un numero intero?
(A) $0{,}002 \cdot 100 + \sqrt{11025}$, **(B)** $32 \cdot 3 \cdot 1{,}6$, **(C)** $(8,2)^2 - (1,8)^2$,
(D) $(\sqrt{2}+1)^2$, **(E)** $\dfrac{34}{1{,}02} + \dfrac{5}{6\sqrt{0{,}0001}}$.

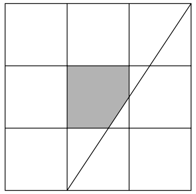
7) Si consideri un triangolo equilatero T, e si chiami G il suo baricentro. Si colorino di rosso tutti i punti interni al triangolo la cui distanza da G è minore o uguale alla distanza da uno qualsiasi dei tre vertici. Quanto vale il rapporto tra l'area rossa e l'area di T?
(A) $\frac{1}{3}$, **(B)** $\frac{1}{4}$, **(C)** $\frac{2}{3}$, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{9}$, **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8) Sapendo che l'equazione $2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 5x + 2 = 0$ ha 4 soluzioni reali a, b, c, d, quanto fa $a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$?
(A) -7, **(B)** $\frac{21}{5}$, **(C)** $\frac{10}{21}$, **(D)** $\frac{5}{2}$, **(E)** 0.

9) Otto giocatori, di cui quattro sono difensori e quattro sono attaccanti, organizzano un torneo di biliardino. Ogni possibile coppia difensore-attaccante gioca una e una sola volta contro ogni altra possibile coppia difensore-attaccante. Quanti incontri faranno in tutto?
(A) 24, **(B)** 36, **(C)** 48, **(D)** 72, **(E)** 144.

10) È dato un numero primo le cui cifre sono, nell'ordine: a, b, c. Quanti divisori primi ha il numero di sei cifre la cui scrittura decimale è $abcabc$?
[Ricordiamo che 1 non è un numero primo.]
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

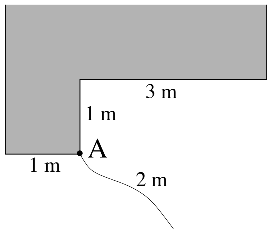
11) Il quadrato in figura è diviso in 9 quadrati congruenti. Sapendo che il suo lato misura L, calcolare l'area evidenziata in grigio.
(A) $\frac{11}{108}L^2$, **(B)** $\frac{1}{9}L^2$, **(C)** $\frac{5}{54}L^2$, **(D)** $\frac{1}{12}L^2$, **(E)** $\frac{13}{81}L^2$.



12) Se $x + \frac{1}{x} = 5$, quanto fa $x^3 + \frac{1}{x^3}$?
(A) 105, **(B)** 110, **(C)** 115, **(D)** 120, **(E)** 125.

13) Uno studente in gita si sveglia la mattina e, dalla sua stanza di un hotel a sette piani (oltre al piano terra), scende in ascensore per recarsi al piano terra a fare colazione. Tuttavia, molto assonnato, preme ripetutamente il pulsante sbagliato e visita esattamente una volta tutti gli altri piani (escluso il suo), prima di arrivare finalmente al piano terra. Sapendo che la sua stanza non si trova al piano terrra, quanta strada percorre l'ascensore, al massimo?
(A) 29 piani, **(B)** 28 piani, **(C)** 27 piani, **(D)** 26 piani, **(E)** 25 piani.

14) Francesco vuole seminare una zona del giardino della sua casa, che ha la forma riportata in figura (casa in grigio e giardino in bianco tutto intorno). Per far questo, lega una corda di 2 m all'angolo A della casa, la tende e, spostandone l'estremità, disegna il perimetro della zona da seminare. Quanti m^2 seminerà Francesco?
(A) $2\pi + \sqrt{3}$, **(B)** $\frac{15}{4}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$, **(C)** $\frac{31}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$,
(D) $\frac{9}{4}\pi$, **(E)** $4\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.

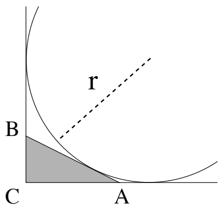


15) Il numero intero positivo n è tale che il polinomio

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots - 2014x^{2013} + nx^{2014}$$

abbia almeno una soluzione intera. Quanto vale n?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 2014, **(D)** 2015, **(E)** nessuna delle precedenti.

16) Sia ABC un triangolo rettangolo i cui cateti misurano AC=2m e BC = 1m. Consideriamo la circonferenza tangente all'ipotenusa e alle rette che contengono AC e BC, esterna al triangolo ABC: quanto misura il suo raggio r in m?
(A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, **(B)** $\sqrt{5}$, **(C)** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, **(D)** 5, **(E)** $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.



17) Simone ha un portafortuna a forma di tetraedro regolare, le cui facce hanno lati di lunghezza $6\sqrt{2}$ cm. Qual è il volume del tetraedro in cm^3?
(A) 36, **(B)** $36\sqrt{2}$, **(C)** 72, **(D)** $72\sqrt{2}$, **(E)** $72\sqrt{3}$

18) Un artista ha realizzato una scultura di pietra che ha la forma di uno strano poliedro. La superficie della scultura è formata da 31 facce triangolari, 18 facce quadrangolari, 11 facce pentagonali e 7 facce esagonali. Quanti spigoli ha il poliedro?
(A) 65, **(B)** 94, **(C)** 100, **(D)** 123, **(E)** 131.

19) In questa stagione accade spesso che quando Luca esce da scuola piova: ciò accade con probabilità uguale a $\frac{2}{5}$. Per questo motivo Luca ritiene opportuno prendere con sé un ombrello, ma a volte se ne dimentica; la probabilità che in un singolo giorno Luca dimentichi l'ombrello è $\frac{1}{2}$. Qual è la probabilità che per tre giorni consecutivi Luca non si bagni mai, durante il ritorno da scuola?
(A) minore di $\frac{1}{6}$, **(B)** compresa tra $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$, **(C)** compresa tra $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$,
(D) compresa tra $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, **(E)** maggiore di $\frac{5}{6}$.

20) Un triangolo equilatero ABC di lato 1 m viene diviso in due parti di area uguale dal segmento DE parallelo ad AB, come in figura; ugualmente, viene diviso in due parti di area uguale dal segmento GF parallelo a BC. Quanti metri è lungo il segmento DF?
(A) $(\sqrt{2} - 1)$, **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **(C)** $(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$, **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **(E)** $\frac{1}{2}$.