I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

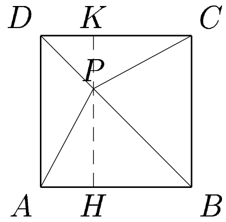
19 novembre 2003

C	D	C	C	C	A	D	B	B	A	A	A	E	B	B	D	C	D	C	B
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1) La risposta è **(C)**. Si ha $0{,}032 = \dfrac{32}{1000}$ e $0{,}8 = \dfrac{8}{10}$. Quindi $0{,}032/0{,}8 = \dfrac{32}{1000} \cdot \dfrac{10}{8} = \dfrac{4}{100} = 0{,}04$.

2) La risposta è **(D)**. Siccome la somma dei numeri naturali da 1 a n vale $\dfrac{n(n+1)}{2}$, la loro media vale $\dfrac{n+1}{2}$, per cui n è ammissibile se e solo se $\dfrac{n+1}{2} < 2003$, cioè se e solo se $n < 4005$. Il massimo di tali n è dunque 4004.
SECONDA SOLUZIONE.
Immaginiamo di scrivere i numeri naturali da 1 a n in ordine crescente e indichiamo con $M(n)$ la loro media aritmetica. Allora $M(n)$ vale il numero centrale dell'elenco se n è dispari e la media dei due numeri centrali dell'elenco se n è pari. Allora il numero richiesto deve essere vicino al doppio di 2002 e qualche semplice tentativo porta a concludere che: $M(4004) = \dfrac{2002+2003}{2} < 2003$ e $M(4005) = 2003$. Se poi $n > 4005$ è chiaro che $M(n) > 2003$. Dunque la risposta esatta è 4004.

3) La risposta è **(C)**. Sia H il piede dell'altezza uscente da P del triangolo ABP e sia K il piede dell'altezza uscente dal triangolo CDP (cioè H e K sono le proiezioni di P su AB e CD). Si ha allora che la somme delle aree dei due triangoli ABP e CDP è



$$\frac{AB \cdot PH}{2} + \frac{CD \cdot PK}{2} = AB \cdot \frac{PH + PK}{2} = \frac{1}{2}$$

perché $PH + PK = HK$ (due segmenti perpendicolari a due rette parallele e aventi un estremo in comune sono allineati) e $AB = CD = HK = 1$. L'area cercata è quindi la stessa qualsiasi sia la posizione di P e non dipende dall'angolo $A\widehat{P}B$; il fatto che l'angolo $A\widehat{P}B$ misuri 75° è irrilevante.

4) La risposta è **(C)**. Con 5 colori il problema è risolvibile, infatti basta disporre i colori come mostrato nella figura a fianco dove ognuno dei numeri corrisponde a un diverso colore.

1	2	3
2	4	1
5	1	2

Per dimostrare che 5 colori sono anche necessari basta considerare che se sulle caselle appartenenti alle diagonali (che sono per l'appunto 5) ci fossero due caselle dello stesso colore, queste apparterrebbero entrambe a una riga, a una colonna o a una diagonale, contraddicendo le richieste del problema.
SECONDA SOLUZIONE.
Indichiamo i colori diversi con a, b, c, d, e. Le caselle della prima riga e quella centrale debbono avere colori tutti diversi (a, b, c, d, come in figura 1), per soddisfare i requisiti. Nella prima e terza casella della terza riga non ci possono essere a, c, d; in una di esse per es. la prima) ci può essere b; ma allora nella terza serve un quinto colore e (fig. 2). Occorrono dunque almeno 5 colori; con cinque colori è altresì possibile riempire la tabella secondo i requisiti (fig. 3).

a	b	c
	d	

Figura 1

a	b	c
	d	
b		e

Figura 2

a	b	c
c	d	a
b	a	e

Figura 3

5) La risposta è **(C)**. Con 20 kg di gelato il gelataio ha confezionato $12 \cdot 20 = 240$ palline; se x e y indicano rispettivamente il numero di gelati da 2 palline e da 3 palline, dalle relazioni

$$2x + 3y = 240 \qquad 1{,}20x + 1{,}60y = 137{,}60$$

si ricava facilmente $y = 32$.

6) La risposta è **(A)**. Se un corpo viene dilatato in lunghezza (mantenendo le proporzioni) di un fattore n, la sua superficie esterna aumenta di un fattore n^2 e il suo volume di un fattore n^3. Quindi, dal momento che i palloncini grandi hanno una superficie ampia 4 volte quella dei palloncini piccoli, essi sono stati dilatati di un fattore 2 e quindi il loro raggio è doppio ($\sqrt{4} = 2$) di quello di un palloncino piccolo. Pertanto il volume di un palloncino grande è $2^3 = 8$ volte quello di un palloncino piccolo. Poiché i palloncini grandi vengono gonfiati alla stessa temperatura e alla stessa pressione dei palloncini piccoli, la quantità di gas necessaria per gonfiare un palloncino grande è 8 volte quella necessaria per gonfiare un palloncino piccolo. Pertanto il venditore riesce a gonfiare con la seconda bombola solo $\dfrac{80}{8} = 10$ palloncini grandi.

7) La risposta è **(D)**. Ovviamente le prime tre dichiarazioni non possono causare problemi. La quinta è piú curiosa, ma permette al sistema di filare liscio, sia che il matematico paghi, sia che non paghi le tasse. È solo la quarta che non può andare: infatti se il matematico paga le tasse diventa falsa, e dunque non doveva pagarle; viceversa, se non le paga, allora è vera e doveva pagarle.

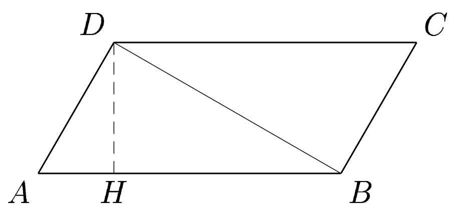
8) La risposta è **(B)**. Utilizziamo due volte l'identità $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, una con $a = 3, b = \sqrt{2}$ e l'altra con $a = 2, b = \sqrt{3}$: si ha che

$$\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right) = 3^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 9 - 2 = 7$$

e

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$$

quindi $\dfrac{1}{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{1}{(9-2)(4-3)} = \dfrac{1}{7}$ e la frazione originaria si riduce a $\dfrac{1}{7}$, cioè un *razionale (non intero) positivo.*



9) La risposta è **(B)**. Sia $ABCD$ il parallelogramma e sia A il vertice dell'angolo di 60°. Siccome i lati opposti sono congruenti, due lati misurano 1 e due misurano 2. Pertanto uno dei lati di misura 1 ha A come estremo e la stessa cosa vale per uno dei lati di misura 2.

Assumiamo le notazioni in modo che AD misuri 1 e AB misuri 2. Allora la diagonale minore è BD. La figura lascia allora supporre che ABD sia mezzo triangolo equilatero, da cui la risposta **(B)**, e un semplice ragionamento conferma la congettura. Sia DH l'altezza di ABD relativa

alla base AB. Allora si ottengono subito le misure di AH e DH, cioè $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ rispettivamente. Seguono subito quelle di HB e di BD, cioè $\frac{3}{2}$ e $\sqrt{3}$.
Seconda Soluzione. Con i dati del problema, ABD è necessariamente simile a metà di un triangolo equilatero (due lati in rapporto 2:1 e angolo compreso di 60°), da cui la tesi.

10) La risposta è **(A)**. Siano $a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}$ le cifre in base 10 di un numero palindromo N con un numero pari di cifre (cioè $N = a_0 + a_1 \cdot 10 + \cdots + a_{2n-1}10^{2n-1}$). Abbiamo allora $a_i = a_{2n-1-i}$ e dunque le cifre di posto pari sono le stesse delle cifre di posto dispari. La somma alternata delle cifre è uguale a zero, quindi N è divisibile per 11. Se N è primo, necessariamente $N = 11$.

11) La risposta è **(A)**. Indichiamo con l il lato di base del parallelepipedo, allora l'altezza h è pari a $4l$, mentre la diagonale di base d è $\sqrt{2}l$. Il rettangolo ottenuto sezionando il parallelepipedo con un piano contenente due diagonali parallele delle basi è inscritto in un cerchio massimo della sfera. Il diametro della sfera è la diagonale di tale rettangolo, avente per lati h e d. Utilizzando il teorema di Pitagora, il raggio della sfera è quindi pari a:

$$r = \frac{\sqrt{(4l)^2 + (\sqrt{2}l)^2}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2}l.$$

La superficie della sfera vale quindi $4\pi r^2 = 18\pi l^2$, mentre la superficie totale del parallelepipedo è: $4(4l \cdot l) + 2l^2 = 18l^2$. Il rapporto cercato è quindi π.

12) La risposta è **(A)**. Si può pensare, per semplificare il problema, che i ragazzi comincino a telefonare alle rispettive ragazze uno dopo l'altro. L'ordine in questo caso è irrilevante. Il primo di essi scegli una frequenza qualsiasi e trova la linea libera. Il secondo sceglie a sua volta una frequenza a caso, qualsiasi sia la frequenza impegnata dal primo ragazzo, la probabilità che il secondo ne impegni una diversa (e che trovi quindi la linea libera) è $\frac{3}{4}$. Quando prova il terzo, se le prime due frequenze sono già impegnate, la probabilità di scegliere una delle due frequenze ancora libere è $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Infine al quarto rimarrà una sola frequenza libera, quindi la probabilità per lui di impegnare l'unica frequenza rimasta libera è $\frac{1}{4}$. La probabilità che si verifichino tutti e tre quasti casi indipendenti è quindi $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$.
Seconda soluzione.
La scelta casuale di una frequenza fra 4, da parte di 4 utenti, può avvenire in $4^4 = 256$ modi; fra queste scelte, quelle in cui le linee impegnate sono tutte diverse sono $4! = 24$. La probabilità di rientrare in uno di questi casi è $\frac{24}{256} = \frac{3}{32}$.

13) La risposta è **(E)**. Giulio, per poter essere certo di ricavare dalla somma delle cifre il numero che ha scelto Damiano, deve aver scritto sul foglio al più un numero per ogni possibile somma (in modo che la somma delle cifre di ciascuno di essi sia diversa da quella di tutti gli altri). La somma delle cifre di un numero di due cifre può assumere soltanto i valori interi da 1 a 18; infatti tale somma è minima se si considera il numero 10, (in tal caso la somma vale 1), ed è massima se si considera il numero 99 (e in tal caso la somma vale 18). È facile verificare che anche tutti i valori compresi fra 1 e 18 sono ottenibili, se ne deduce che ci sono 18 possibili somme distinte che possono essere ricavate a partire da numeri di due cifre e pertanto 18 è il numero massimo di numeri che Giulio può aver scritto nell'elenco.

14) La risposta è **(B)**. Le quattro affermazioni si contraddicono vicendevolmente, quindi al più una di esse può essere vera, quindi ci sono almeno tre affermazioni false, tra cui certamente le prime due. Dunque una delle due ultime affermazioni deve essere vera, e quindi la quarta è falsa e la terza è vera.

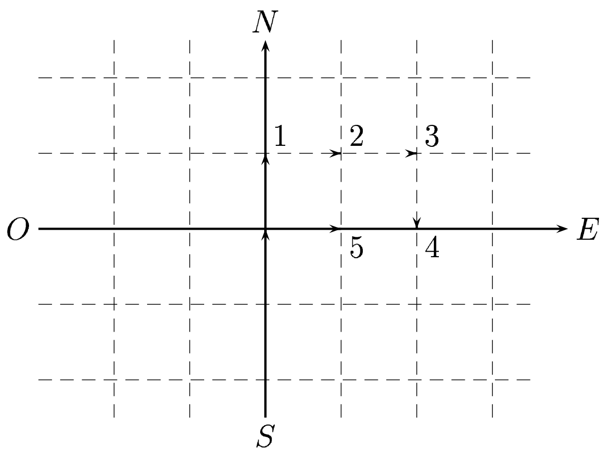
15) La risposta è **(B)**. Poiché $8n + 50 = 4(2n + 1) + 46$, $8n + 50$ è un multiplo di $2n + 1$ se e solo se 46 è un multiplo di $2n + 1$. L'unico divisore di 46 della forma $2n + 1$ con n positivo è 23.

16) La risposta è **(D)**. Sviluppando i prodotti si ha $p + qr = p^2 + pq + pr + qr$, ossia $p = p(p + q + r)$, quindi se $p \neq 0$ deve essere $p + q + r = 1$.

17) La risposta è **(C)**. Ciascuno dei cinque angoli della stella è un angolo alla circonferenza, e ognuno di essi è sotteso da un arco. L'unione di tali archi copre tutta la circonferenza, e la somma delle lunghezze di tali archi è proprio la lunghezza dell'intera circonferenza. È noto che gli angoli alla circonferenza sottesi da un'arco sono ampi la metà degli angoli al centro corrispondenti. La somma degli angoli aventi i vertici nelle punte è metà dell'angolo al centro sotteso da tutta la circonferenza, ovvero un angolo giro, da cui la somma è $\dfrac{360°}{2} = 180°$.

18) La risposta è **(D)**. Ogni triangolo è identificato univocamente dai suoi tre vertici: quindi dobbiamo contare i diversi modi di scegliere tre vertici non allineati tra i sei punti presenti.
Contiamo innanzitutto i modi di scegliere tre punti qualunque: il primo vertice può essere scelto in 6 modi; il secondo in 5 (tra i rimanenti) e il terzo in 4; con questo conteggio però abbiamo contato ogni combinazione di tre vertici secondo tutti i suoi 6 ordinamenti possibili: quindi le possibili scelte di 3 punti sono $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$. Però ci sono 2 scelte che portano a scegliere dei punti allineati che formano un triangolo degenere: le scelte accettabili sono allora soltanto $20 - 2 = 18$.

19) La risposta è **(C)**. Detta "origine" la posizione iniziale di Giovanni, e "Nord" la direzione in cui è rivolto, si nota che dopo i primi 5 passi (vedi figura a fianco) Giovanni si trova nel punto $(1, 0)$ e guarda a Est. Perciò ogni 5 passi Giovanni si trova spostato di un solo passo verso destra, ruotato di $90°$ verso destra. Dopo $4 \cdot 5 = 20$ passi, Giovanni si ritroverà nell'origine, rivolto a Nord, ossia nella stessa posizione iniziale. Dopo i primi 180 passi (multiplo di 20) Giovanni è ancora al punto di partenza, rivolto a Nord. Con altri 5 passi si trova nel punto $(1,\ 0)$ e guarda a Est; con un ulteriore passo avanti (il 186−esimo) raggiungerà il punto $(2,\ 0)$, a due metri dal punto di partenza.



20) La risposta è **(B)**. I cerchi piccoli hanno infatti il diametro pari a $\dfrac{1}{3}$ di quello del cerchio grande, e dunque l'area di ognuno di essi è uguale a $\dfrac{1}{9}$ di quella del cerchio grande. L'area della porzione del cerchio grande "al di fuori" dei cerchi piccoli è dunque uguale a $\dfrac{4}{9}$ dell'area del cerchio grande. La porzione precedente è però divisa in quattro figure uguali (di cui una è la figura b), ognuna delle quali ha area uguale a $\dfrac{1}{9}$ dell'area del cerchio grande.