

Prova di Matematica: **Sistemi di I grado**

| 1. Determina il grado dei seguenti sistemi | |
|--|---|
| $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x^2 - xy^2 = 1 \end{cases}$ | $\begin{cases} 2x + y^2 = 1 \\ y^2 \cdot (1 - x) = 0 \end{cases}$ |
| Sistema di ____ grado | Sistema di ____ grado |

| Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema | | | |
|--|----|---|----|
| $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad (x = 1; y = -1)$ | | $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ y - x = 5 \end{cases} \quad (x = 3; y = -2)$ | |
| SI | NO | SI | NO |

2. Risolvi i seguenti sistemi:

| | | | |
|---|--|---|---------------------------------------|
| $\begin{cases} \frac{12x - 7}{2} - \frac{3(2x + y)}{10} = \frac{7}{10} \\ \frac{2x + y}{3} = \frac{4}{9} + \frac{x + y}{2} \end{cases}$ | <i>con due metodi a tua scelta</i> | $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$ | <i>con un metodo a tua scelta</i> |
|---|--|---|---------------------------------------|

3. Il caffè di qualità A costa 12 € al kg, mentre quello di qualità B costa 8 € al kg. Quali quantità delle due qualità di caffè occorre miscelare per ottenere 1 kg di miscela al costo di 11 € ?
4. Un'automobile parte da una località A e raggiunge una località B, distante 120 km, ritornando quindi in A. Il percorso è composto da un tratto pianeggiante, da A a C, e da un tratto in salita, da C a B. L'automobile, viaggiando a velocità costante, percorre il tratto pianeggiante in un'ora sia all'andata sia al ritorno. L'automobile, viaggiando a velocità costante, percorre il tratto in salita in 40 minuti, e al ritorno, lo stesso tratto in discesa, in 24 minuti. Sapendo che la velocità dell'automobile in discesa supera di 20 km/h quella in piano, determina la velocità dell'auto in piano, in salita e in discesa.

Soluzione

| 1. Determina il grado dei seguenti sistemi | |
|--|---|
| $\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x^2 - xy^2 = 1 \end{cases}$ | $\begin{cases} 2x + y^2 = 1 \\ y^2 \cdot (1 - x) = 0 \end{cases}$ |
| Sistema di 3° grado | Sistema di 6° grado |

| Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema | |
|--|---|
| $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad (x = 1; y = -1)$ | $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ y - x = 5 \end{cases} \quad (x = 3; y = -2)$ |
| SI | NO |

2. Risolvi i seguenti sistemi:

| | |
|--|---|
| $\begin{cases} \frac{12x - 7}{2} - \frac{3(2x + y)}{10} = \frac{7}{10} \\ \frac{2x + y}{3} = \frac{4}{9} + \frac{x + y}{2} \end{cases}$ <i>con due metodi a tua scelta</i> | $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$ <i>con un metodo a tua scelta</i> |
|--|---|

$$\begin{cases} \frac{12x - 7}{2} - \frac{3(2x + y)}{10} = \frac{7}{10} \\ \frac{2x + y}{3} = \frac{4}{9} + \frac{x + y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10 \cdot \frac{12x - 7}{2} - 10 \cdot \frac{3(2x + y)}{10} = 10 \cdot \frac{7}{10} \\ 18 \cdot \frac{2x + y}{3} = 18 \cdot \frac{4}{9} + 18 \cdot \frac{x + y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 \cdot (12x - 7) - 3 \cdot (2x + y) = 7 \\ 6 \cdot (2x + y) = 2 \cdot 4 + 9 \cdot (x + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60x - 35 - 6x - 3y = 7 \\ 12x + 6y = 8 + 9x + 9y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 54x - 3y = 42 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{54}{3} = 18 \right) \neq \left(\frac{b}{b'} = \frac{-3}{-3} = 1 \right) \quad \text{Sistema determinato}$$

Metodo di riduzione

$$18 \cdot \begin{cases} 54x - 3y = 42 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 54x - 3y = 42 & - \\ 54x - 54y = 144 & = \end{cases}$$

$$51y = -102; \quad y = -2.$$

$$\begin{cases} 54x - 3y = 42 & - \\ 3x - 3y = 8 & = \end{cases}$$

$$51x = 34; \quad x = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}.$$

La soluzione è $(x = \frac{2}{3}; y = -2)$.

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 54x - 3y = 42 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x - y = 14 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 18x - 14 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 3(18x - 14) = 8 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 54x + 42 = 8 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} -51x = -34 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 18 \cdot \frac{2}{3} - 14 = 12 - 14 = -2 \\ - \end{cases}$$

La soluzione è $(x = \frac{2}{3}; y = -2)$.

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & | & 3 & -1 \end{vmatrix} = (4 + 3 - 1) - (6 + 1 - 2) = 6 - 5 = 1 \neq 0 \quad \text{Sistema determinato}$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & | & -1 & -1 \\ 8 & 2 & -1 & | & 8 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & | & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-4 + 3 - 8) - (6 - 1 - 16) = -9 - (-11) = 2$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & -1 \\ 1 & 8 & -1 & | & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & | & 3 & 3 \end{vmatrix} = (16 + 3 + 3) - (24 - 3 - 2) = 22 - 19 = 3$$

$$|D_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 8 & | & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & | & 3 & -1 \end{vmatrix} = (6 - 24 + 1) - (-6 - 8 - 3) = -17 - (-17) = 0$$

La soluzione è $\left(x = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{1} = 2; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{3}{1} = 3; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{1} = 0\right)$.

4. Il caffè di qualità A costa 12 € al kg, mentre quello di qualità B costa 8 € al kg. Quali quantità delle due qualità di caffè occorre miscelare per ottenere 1 kg di miscela al costo di 11 € ?

Soluzione

Poniamo la quantità in kg del caffè A = x,

mentre la quantità in kg del caffè B = y,

$$0 < x < 1 \quad \wedge \quad 0 < y < 1.$$

Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 12x + 8y = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - y \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 12(1 - y) + 8y = 11 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 12 - 12y + 8y = 11 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y = -1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Per la miscela richiesta occorrono 0,75 kg di caffè della qualità A e 0,25 kg di caffè della qualità B.

5. Un'automobile parte da una località A e raggiunge una località B, distante 120 km, ritornando quindi in A. Il percorso è composto da un tratto pianeggiante, da A a C, e da un tratto in salita, da C a B. L'automobile, viaggiando a velocità costante, percorre il tratto pianeggiante in un'ora sia all'andata sia al ritorno. L'automobile, viaggiando a velocità costante, percorre il tratto in salita in 40 minuti, e al ritorno, lo stesso tratto in discesa, in 24 minuti. Sapendo che la velocità dell'automobile in discesa supera di 20 km/h quella in piano, determina la velocità dell'auto in piano, in salita e in discesa.

Soluzione

Innanzitutto trasformiamo: $t_{in\ salita} = 40^I = \left(\frac{40}{60}\right)^h = \left(\frac{2}{3}\right)^h$ e $t_{in\ discesa} = 24^I = \left(\frac{24}{60}\right)^h = \left(\frac{2}{5}\right)^h$

Poniamo la velocità in piano = x , la velocità in salita = y , la velocità in discesa = z $x > 0$ $y > 0$ $z > 0$.

Dalla relazione $v = \frac{s}{t}$ si ricava: $s = v \cdot t$.

Dai dati del problema si ha:

$$S_{AC} = v_{in\ piano} \cdot t_{in\ piano} = x \cdot 1 = x$$

$$S_{CB} = v_{in\ salita} \cdot t_{in\ salita} = y \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}y$$

$$S_{BC} = v_{in\ discesa} \cdot t_{in\ discesa} = z \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}z$$

Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} S_{AC} + S_{CB} = 120 \\ S_{CB} = S_{BC} \\ v_{in\ discesa} = v_{in\ piano} + 20 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = 120 \\ \frac{2}{3}y = \frac{2}{5}z \\ z = x + 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 360 \\ 10y = 6z \\ z = x + 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 360 \\ 10y = 6(x + 20) \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 360 \\ 10y = 6x + 120 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 360 \\ -6x + 10y = 120 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 360 - 3x \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} y = 180 - \frac{3}{2}x \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 10 \cdot \left(180 - \frac{3}{2}x\right) = 120 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -6x + 1800 - 15x = 120 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -21x = -1680 \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 80 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} y = 180 - \frac{3}{2} \cdot 80 = 180 - 120 = 60 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ z = 80 + 20 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 80 \\ y = 60 \\ z = 100 \end{cases}$$

La velocità dell'auto in piano è di 80 km/h.

La velocità dell'auto in salita è di 60 km/h.

La velocità dell'auto in discesa è di 100 km/h.

