Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2023-2024

Classe *2B Liceo Scientifico*

Prova di Matematica: Radicali

Alunno: ____ *Classe:* **2B** *L. Scientifico* *15 novembre 2023*

1. **Semplifica le seguenti espressioni:**

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{27}+2\sqrt{32}+\frac{12}{\sqrt{6}}-3^{\frac{3}{2}} \qquad \left(1-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{9-4\sqrt{2}}$$

2. **Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, semplifica i seguenti radicali:**

$$\sqrt{x^2+16x+64} \qquad \sqrt{x^{12}(2x+1)^{14}} \qquad \sqrt[3]{8x^3+12x^2+1+6x}$$

3. **Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili:**

$$\sqrt[4]{9x^{12}} \qquad \sqrt{x^3-9x^2} \qquad \sqrt{4a^3-12a^2+9a}$$

4. **Risolvi la seguente disequazione:** $\dfrac{x}{1-\sqrt{5}} > \dfrac{x-1}{1+\sqrt{5}}$

5. **Dimostra che la somma di un numero razionale e di un numero irrazionale è un numero irrazionale:**

Soluzione

1. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\boldsymbol{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{27}+2\sqrt{32}+\frac{12}{\sqrt{6}}-3^{\frac{3}{2}}} \quad =$$

$$= \quad 2+3-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}+2\cdot 4\sqrt{2}+\frac{12}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}-\sqrt[2]{3^3} \quad =$$

$$= \quad 5-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}+8\sqrt{2}+2\sqrt{6}-3\sqrt{3} \quad = \quad 5+8\sqrt{2}\ .$$

$$\boldsymbol{\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}$$

$Calcolo$: $\sqrt{9-4\sqrt{2}} \quad = \quad \sqrt{9-\sqrt{4^2\cdot 2}} \quad = \quad \sqrt{9-\sqrt{32}} \quad =$ $\qquad a^2-b=9^2-32=81-32=49\ .$

$$\sqrt{9-\sqrt{32}} \quad = \quad \sqrt{\frac{9+\sqrt{49}}{2}}-\sqrt{\frac{9-\sqrt{49}}{2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{9+7}{2}}-\sqrt{\frac{9-7}{2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{16}{2}}-\sqrt{\frac{2}{2}} \quad = \quad \sqrt{8}-1 \quad = \quad 2\sqrt{2}-1$$

Pertanto:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{9-4\sqrt{2}} \quad = \quad 1+2-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-1 \quad = \quad 2\ .$$

2. Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, semplifica i seguenti radicali:

$\boldsymbol{\sqrt{x^2+16x+64}} \quad = \quad \sqrt{(x+8)^2} \quad = \quad |x+8|$ $\qquad C.E.:\ \forall x\in R$

$\boldsymbol{\sqrt{x^{12}(2x+1)^{14}}} \quad = \quad x^6\cdot|2x+1|^7$ $\qquad C.E.:\ \forall x\in R$

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{8x^3+12x^2+1+6x}}$$

$\sqrt[3]{8x^3+12x^2+1+6x} \quad = \quad \sqrt[3]{(2x+1)^3} \quad = \quad 2x+1$ $\qquad C.E.:\ \forall x\in R$

3. Dopo aver determinato le condizioni di esistenza, trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili:

$\boldsymbol{\sqrt[4]{9x^{12}}} \quad = \quad \sqrt[4]{3^2}\cdot\sqrt[4]{x^{12}} \quad = \quad |x^3|\sqrt{3}$ $\qquad C.E.:\ \forall x\in R$

$\boldsymbol{\sqrt{x^3-9x^2}} \quad =$ $\qquad C.E.: x\geq 9 \quad \vee \quad x=0\ .$

$$= \sqrt{x^2\cdot(x-9)} \quad = \quad \begin{cases} x\cdot\sqrt{x-9} & se\ \ x\geq 9 \\ 0 & se\ \ x=0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{\sqrt{4a^3-12a^2+9a}} \quad =$ $\qquad C.E.: a\geq 0\ .$

$$= \quad \sqrt{a\cdot(4a^2-12a+9)} \quad = \quad \sqrt{a\cdot(2a-3)^2} \quad = \quad |2a-3|\sqrt{a}\ .$$

4. Risolvi la seguente disequazione: $\dfrac{x}{1-\sqrt{5}} > \dfrac{x-1}{1+\sqrt{5}}$

Metodo 1

$\dfrac{x}{1-\sqrt{5}} - \dfrac{x-1}{1+\sqrt{5}} > 0\,;$ $\dfrac{x(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})(x-1)}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} > 0\,;$

$\dfrac{x+\sqrt{5}x-(x-1-\sqrt{5}x+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} > 0\,;$ $\dfrac{x+\sqrt{5}x-x+1+\sqrt{5}x-\sqrt{5}}{1-5} > 0\,;$

$\dfrac{2\sqrt{5}x+1-\sqrt{5}}{-4} > 0\,;$ *moltiplichiamo ambo i membri per* $-4 \;\Rightarrow$ *cambia il verso della disequazione*

$\dfrac{2\sqrt{5}x+1-\sqrt{5}}{-4}\cdot(-4) > 0\cdot(-4)\,;$ $2\sqrt{5}x+1-\sqrt{5} < 0\,;$

$2\sqrt{5}x < \sqrt{5}-1\,;$ $x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\,;$

$x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\,;$ $x < \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\,.$

Metodo 2

$\dfrac{x}{1-\sqrt{5}} - \dfrac{x-1}{1+\sqrt{5}} > 0\,;$ $\dfrac{x(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})(x-1)}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} > 0\,;$

$\dfrac{x+\sqrt{5}x-(x-1-\sqrt{5}x+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} > 0\,;$ $\dfrac{x+\sqrt{5}x-x+1+\sqrt{5}x-\sqrt{5}}{1-5} > 0\,;$

$\dfrac{2\sqrt{5}x+1-\sqrt{5}}{-4} > 0\,;$ *spostiamo il meno dal denominatore al numeratore* $\dfrac{-(2\sqrt{5}x+1-\sqrt{5})}{4} > 0\,;$

$-(2\sqrt{5}x+1-\sqrt{5}) > 0\,;$ $2\sqrt{5}x+1-\sqrt{5} < 0\,;$

$2\sqrt{5}x < \sqrt{5}-1\,;$ $x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\,;$

$x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\,;$ $x < \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\,.$

Metodo 3

$\dfrac{x}{1-\sqrt{5}} > \dfrac{x-1}{1+\sqrt{5}}\,;$ $m.c.m. = (1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 1-5 = -4 < 0$

Moltiplicando i due termini per il $m.c.m. = -4$ *(numero negativo)* $\Rightarrow$ *cambia il verso della diseguaglianza:*

$\dfrac{x}{1-\sqrt{5}}\cdot(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) < \dfrac{x-1}{1+\sqrt{5}}\cdot(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})\,;$

$x(1+\sqrt{5}) < (x-1)(1-\sqrt{5})\,;$ $x+\sqrt{5}x < x-1-\sqrt{5}x+\sqrt{5}\,;$

$\sqrt{5}x+\sqrt{5}x < \sqrt{5}-1\,;$ $2\sqrt{5}x < \sqrt{5}-1\,;$

$x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\,;$ $x < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\,;$

$x < \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\,.$

5. Dimostra che la somma di un numero razionale e di un numero irrazionale è un numero irrazionale:

Dimostriamo quindi che:

Se $\boldsymbol{a}$ un numero razionale e $\boldsymbol{b}$ un numero irrazionale	$\Longrightarrow$	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ è un numero irrazionale

<u>Dimostrazione per assurdo</u>

Supponiamo per assurdo che $a+b$ *sia un numero razionale, cioè:*
$a+b=\frac{m}{n}$ *con* a *e* b *numeri primi tra loro.*
Dalla relazione precedente si ottiene: $b=\frac{m}{n}-a$
Ma il secondo membro è la differenza di due numeri razionali.
Quindi anche il primo membro b *è un numero razionale.*
Ma ciò va contro l'ipotesi che afferma che b *un numero irrazionale. Abbiamo ottenuto un assurdo.*
Pertanto $a+b$ *non può essere un numero razionale.*
Si conclude che $a+b$ *è un numero irrazionale.*