Classe **2B Liceo Scientifico** 7 febbraio 2024

Prova di Matematica: Piano Cartesiano - Retta

1. Traccia il grafico della funzione definita a tratti: $y = \begin{cases} x+5 & se\ \ x < -3 \\ -x-1 & se\ -3 \leq x < 1 \\ -2 & se\ \ x \geq 1 \end{cases}$

2. Dati i punti: $A\,(0;4)$, $B\,(3;\ 0)$, $C\,(8;\ 10)$, determina:

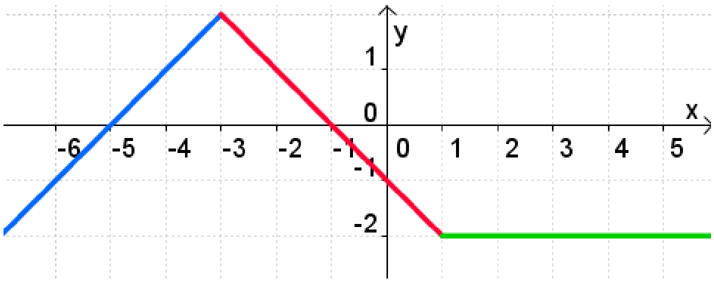
a. **La misura del perimetro del triangolo ABC;**
b. **l'area del triangolo ABC;**
c. **le coordinate del circocentro.**

3. Tre banche propongono tre diverse forme di investimento di durata un anno:
La banca "Azzurra" propone un rendimento netto del 4% diminuito di 80 euro per le spese di gestione;
La banca "Verde" propone un rendimento netto del 6% diminuito di 150 euro per le spese di gestione;
La banca "Rossa" propone un rendimento netto del 8% diminuito di 300 euro per le spese di gestione.
Determina, in dipendenza del capitale che si vuole investire, qual è la forma di investimento più conveniente.

Soluzione

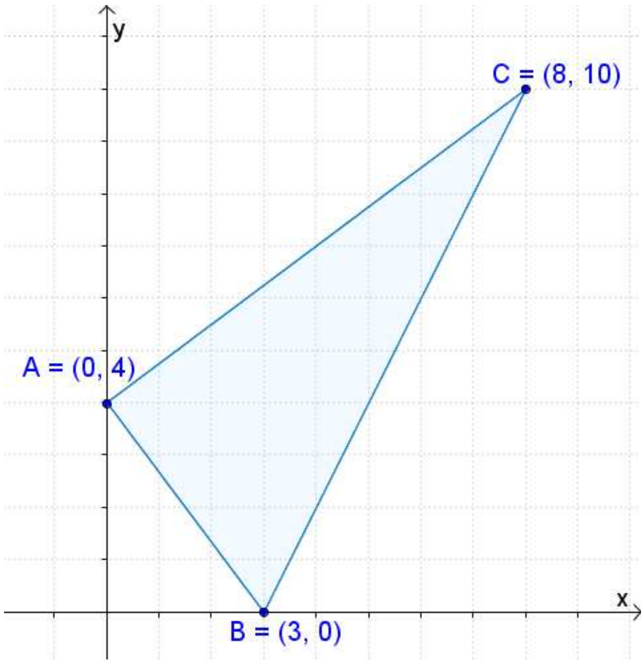
1. Traccia il grafico della funzione definita a tratti:

$$y = \begin{cases} x+5 & se\ \ x < -3 \\ -x-1 & se\ -3 \le x < 1 \\ -2 & se\ \ x \ge 1 \end{cases}$$



2. Dati i punti: $A\,(0;4)$, $B\,(3;\ 0)$, $C\,(8;\ 10)$, determina:

a. **La misura del perimetro del triangolo ABC;**
b. **l'area del triangolo ABC;**
c. **le coordinate del circocentro.**



Soluzione a

Calcoliamo la misura del lato AB :

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\,.$$

Calcoliamo la misura del lato BC :

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} =$$
$$= \sqrt{(3-8)^2 + (0-10)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\,.$$

Calcoliamo la misura del lato AC :

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} =$$
$$= \sqrt{(0-8)^2 + (4-10)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10\,.$$

La misura del perimetro è: $p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 5 + 5\sqrt{5} + 10 = \mathbf{15 + 5\sqrt{5}}$.

Soluzione b

L'area del triangolo è dato da:

$$S_{ABC} = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_c & 1 \end{vmatrix} \right| =$$

Prendendo i vertici A, B, C in senso antiorario, è possibile eliminare il valore assoluto.

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \end{matrix} =$$

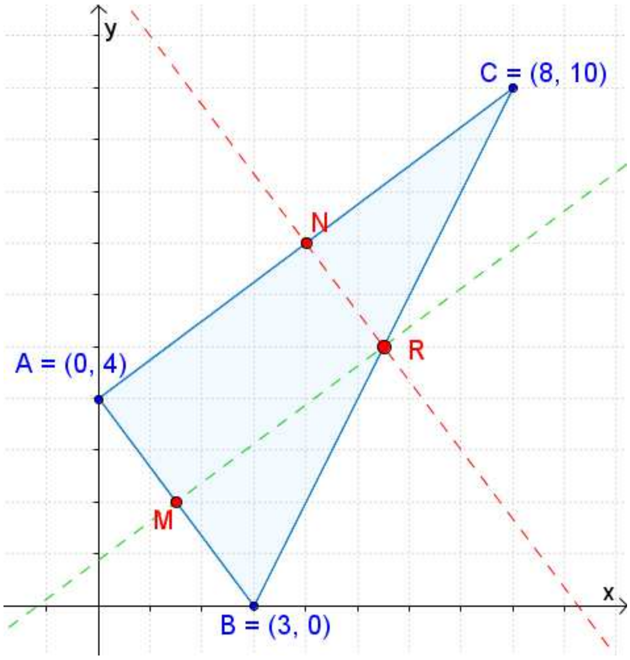
$$= \frac{1}{2} \cdot [(0+32+30) - (0+0+12)] = \frac{1}{2} \cdot [62-12] = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25\,.$$

Oppure, osservando che si tratta di un triangolo rettangolo poiché le misure dei lati formano una terna pitagorica, si ha:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 25\,.$$

[Soluzione c](#)

Il circocentro di un triangolo è il punto di incontro dei tre assi.



Determiniamo l'asse del segmento AB:

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$;

$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = (x - 3)^2 + (y - 0)^2$;

$x^2 + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 9 - 6x + y^2$;

$-8y = -6x - 7$;

$8y = 6x + 7$;

$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}$;

Determiniamo l'asse del segmento AC:

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2$;

$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = (x - 8)^2 + (y - 10)^2$;

$x^2 + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 64 - 16x + y^2 + 100 - 20y$;

$16 - 8y = 64 - 16x + 100 - 20y$;

$20y - 8y = -16x - 16 + 64 + 100$;

$12y = -16x + 148$;

$y = -\frac{4}{3}x + \frac{37}{3}$;

Determiniamo le coordinate del circocentro R, punto d'incontro dei due assi:

$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{8} \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{37}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{7}{8} = -\frac{4}{3}x + \frac{37}{3} \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} 18x + 21 = -32x + 296 \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} 18x + 32x = -21 + 296 \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} 50x = 275 \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ y = \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{2} + \frac{7}{8} = \frac{33}{8} + \frac{7}{8} = \frac{40}{8} = 5 \end{cases}$

Il circocentro ha pertanto coordinate: $C\left(\frac{11}{2}\,; 5\right)$.

3. Tre banche propongono tre diverse forme di investimento di durata un anno:
La banca “Azzurra” propone un rendimento netto del 4% diminuito di 80 euro per le spese di gestione;
La banca “Verde” propone un rendimento netto del 6% diminuito di 150 euro per le spese di gestione;
La banca “Rossa” propone un rendimento netto del 8% diminuito di 300 euro per le spese di gestione.
Determina, in dipendenza del capitale che si vuole investire, qual è la forma di investimento più conveniente.

Soluzione

Indichiamo con x il capitale investito e con y il rendimento prodotto. Con $x \in N$.

Il Rendimento proposto dalla banca “Azzurra” è espresso dalla funzione lineare: $y = \frac{4}{100}x - 80$

Il Rendimento proposto dalla banca “Verde” è espresso dalla funzione lineare: $y = \frac{6}{100}x - 150$

Il Rendimento proposto dalla banca “Rossa” è espresso dalla funzione lineare: $y = \frac{8}{100}x - 300$

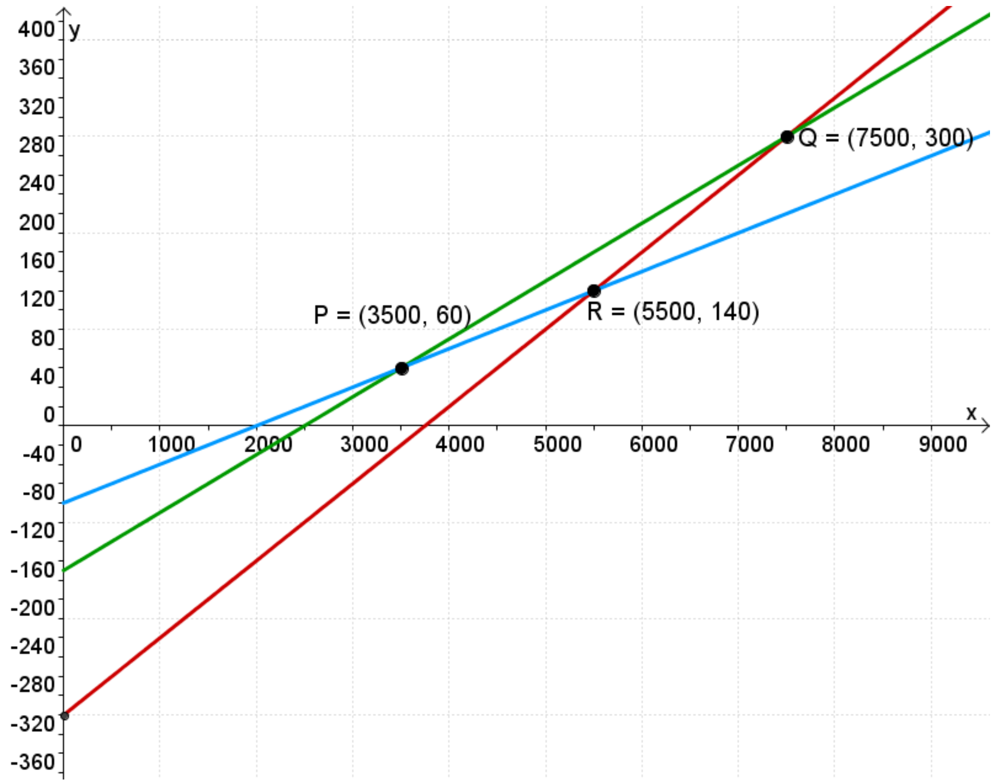
Determiniamo i punti di intersezione fra le tre funzioni lineari:

$$\begin{matrix} A \\ V \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{4}{100}x - 80 \\ y = \frac{6}{100}x - 150 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6}{100}x - 150 = \frac{4}{100}x - 80 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 15000 = 4x - 8000 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 7000 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3500 \\ y = 60 \end{cases} \Rightarrow P\,(3500\,;60)$$

$$\begin{matrix} V \\ R \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{6}{100}x - 150 \\ y = \frac{8}{100}x - 300 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6}{100}x - 150 = \frac{8}{100}x - 300 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 6x - 15000 = 8x - 30000 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 15000 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7500 \\ y = 300 \end{cases} \Rightarrow Q(7500; 300)$$

$$\begin{matrix} A \\ R \end{matrix}\begin{cases} y = \frac{4}{100}x - 80 \\ y = \frac{8}{100}x - 300 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{8}{100}x - 300 = \frac{4}{100}x - 80 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 8x - 30000 = 4x - 8000 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = 22000 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5500 \\ y = 140 \end{cases} \Rightarrow R\,(5500\,;140)$$

Tracciamo poi i grafici delle tre funzioni lineari:



Dall’analisi dei grafici si ottiene:
per capitali inferiori ai 2000 euro non conviene effettuare alcun tipo di investimento (in perdita);
per capitali tra i 2000 euro e i 7500 euro conviene l’investimento della banca “Azzurra”;
per capitali tra i 3500 euro e i 7500 euro conviene l’investimento della banca “Verde”;
per capitali oltre i 7500 euro conviene l’investimento della banca “Rossa”;
per un capitale di 3500 euro è indifferente investire con la banca “Azzurra” o con la banca “Verde”;
per un capitale di 5500 euro è indifferente investire con la banca “Azzurra” o con la banca “Rossa”;
per un capitale di 7500 euro è indifferente investire con la banca “Rossa” o con la banca “Verde”;