Prova di Matematica: Equazioni di II grado - Parabola

1. Risolvi la seguente equazione: $$\frac{x+7}{3x^2-7x+2}-\frac{3-x}{x-2}=-2$$

2. Risolvi e discuti la seguente equazione letterale: $$\frac{a}{x^2-3x+2}+\frac{a+3-x}{x-1}=a$$

3. Un triangolo isoscele, inscritto in una circonferenza di diametro $20\ m$, ha l'altezza uguale alla base. Determina l'area del triangolo.

4. Un rete è lunga 50 metri. Si vuole tagliare la rete in due parti per delimitare un'aiuola quadrata e un'aiuola rettangolare di larghezza 4 m. Come dovrà essere tagliata la rete in modo che la somma delle aree delle due aiuole sia minima?

Soluzione

$$\frac{x+7}{3x^2-7x+2}-\frac{3-x}{x-2}=-2\ ;$$

Fattorizziamo $3x^2-7x+2=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)=(3x-1)(x-2)$

Calcoli: $3x^2-7x+2=0\ ;\qquad \Delta=49-24=25\ ;\qquad x_{1,2}=\frac{7\mp\sqrt{25}}{2\cdot 3}=\begin{matrix} x_1=\frac{7-5}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\ x_2=\frac{7+5}{6}=\frac{12}{6}=2 \end{matrix}$

$$\frac{x+7}{(3x-1)(x-2)}-\frac{3-x}{x-2}=-2\ ;$$

$C.E.:\ x\neq\frac{1}{3}\quad\wedge\quad x\neq 2$

$m.c.m.=(a-1)(2x-1)$

$x+7-(3-x)(3x-1)=-2\cdot(3x-1)(x-2)\ ;$

$x+7-(9x-3-3x^2+x)=-2\cdot(3x^2-6x-x+2)\ ;$

$x+7-9x+3+3x^2-x=-6x^2+12x+2x-4\ ;$

$x+7-9x+3+3x^2-x+6x^2-12x-2x+4=0;$

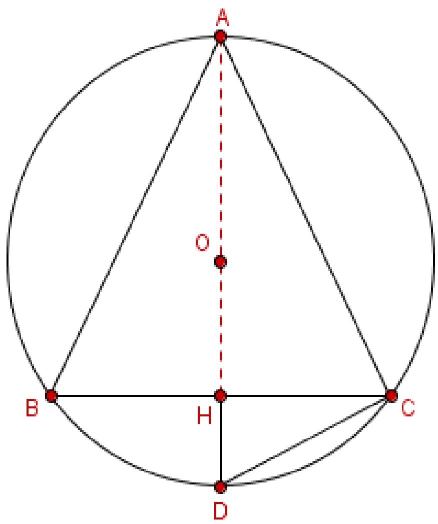
$9x^2-23x+14=0;\qquad \Delta=(-23)^2-4\cdot 9\cdot 14=529-504=25$

$$x_{1,2}=\frac{23\mp\sqrt{25}}{2\cdot 9}=\begin{matrix} x_1=\frac{23-5}{18}=\frac{18}{18}=1 & \quad Accettabile \\ x_2=\frac{23+5}{18}=\frac{28}{18}=\frac{14}{9} & \quad Accettabile \end{matrix}$$

3. Un triangolo isoscele, inscritto in una circonferenza di diametro $20\ m$, ha l'altezza uguale alla base. Determina l'area del triangolo.

DATI
$$\begin{cases} \overline{AD}=20\ m \\ \overline{AH}=\overline{BC} \end{cases}$$

$S_{ABC}=?$



Soluzione

Poniamo $\overline{HC}=x$ *con dominio di variabilità:* $0<x\leq 10$,

si ha: $\overline{BC}=\overline{AH}=2x$ *e* $\overline{HD}=20-2x$

Applicando il II teorema di Euclide al triangolo rettangolo ADC si ottiene:

$\overline{HC}^{\,2}=\overline{AH}\cdot\overline{HD}\ ;$

$x^{\,2}=2x\cdot(20-2x)\ ;$

$x^{\,2}=40x-4x^{\,2}\ ;$

$5x^{\,2}-40x=0\ ;\quad 5x\cdot(x-8)=0\ ;\quad \begin{matrix} x_1=0 & non\ Accettabile \\ x_2=8 & Accettabile \end{matrix}$

Pertanto $\overline{HC}=8\ m$ *e* $\overline{AH}=\overline{BC}=16\ m$.

L'area del triangolo ABC è:

$$S_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AH}}{2}=\frac{16\cdot 16}{2}\ m^2=128\ m^2\ .$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x^2-3x+2}}+\frac{\boldsymbol{a+3-x}}{\boldsymbol{x-1}}=\boldsymbol{a}\,; \qquad C.A.(incognita):\ x\neq 1 \quad \wedge \quad x\neq 2$$

$$\frac{a}{(x-1)(x-2)}+\frac{a+3-x}{x-1}-a=0\,; \qquad m.c.m.=\ (x-1)(x-2)$$

$a+(a+3-x)(x-2)-a(x-1)(x-2)=0\,;$

$a+ax+3x-x^2-2a-6+2x-a(x^2-3x+2)=0\,;$

$a+ax+3x-x^2-2a-6+2x-ax^2+3ax-2a=0\,;$

$a+ax+3x-x^2-2a-6+2x-ax^2+3ax-2a=0\,;$

$(-1-a)x^2+(5+4a)x-3a-6=0\,;$

$(a+1)x^2-(4a+5)x+3a+6=0\,; \qquad \boldsymbol{A=a+1}\,; \qquad \boldsymbol{B}=-(4a+5)\,; \qquad \boldsymbol{C=3a+6}$

$A=0\,; \quad a+1=0\,; \quad a=-1 \quad \Rightarrow \quad -[4\cdot(-1)+5]x+3\cdot(-1)+6=0\,; \quad -x+3=0\,; \quad x=3\,.$

$\Delta\ =(-4a-5)^2-4\cdot(a+1)\cdot(3a+6) \ = \ 16a^2+25+40a-4\cdot(3a^2+6a+3a+6)=$

$= \ 16a^2+25+40a-12a^2-24a-12a-24= \ 4a^2+4a+1= \ (2a+1)^2\,.$

$\Delta>0$ $(2a+1)^2>0$ $a\neq-\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	$x_{1,2}=\dfrac{4a+5\mp\sqrt{(2a+1)^2}}{2\cdot(a+1)}=$ $x_1=\dfrac{4a+5-(2a+1)}{2\cdot(a+1)}=\dfrac{2a+4}{2\cdot(a+1)}=\dfrac{2\cdot(a+2)}{2\cdot(a+1)}=\dfrac{a+2}{a+1}$ $x_2=\dfrac{4a+5+(2a+1)}{2\cdot(a+1)}=\dfrac{6a+6}{2\cdot(a+1)}=\dfrac{6\cdot(a+1)}{2\cdot(a+1)}=3$
$\Delta=0$ $(2a+1)^2=0$ $a=-\frac{1}{2}$	$\Rightarrow$	$x_{1,2}=3$
$\Delta<0$ $(2a+1)^2<0$ $\nexists\ a\in R$	$\Rightarrow$	$-$

<u>Accettabilità delle soluzioni:</u>

La soluzione $x_2=3$ *è accettabile perché* $x_2\neq 1 \quad \wedge \quad x_2\neq 2\,.$

La soluzione $x_1=\frac{a+2}{a+1}$ *è accettabile se* $x_1\neq 1 \quad \wedge \quad x_1\neq 2\,.$

$x_1\neq 1\,; \qquad \dfrac{a+2}{a+1}\neq 1\,; \qquad a+2\neq a+1\,; \qquad 2\neq 1 \qquad \forall a\in R\ .$

$x_1\neq 2\,; \qquad \dfrac{a+2}{a+1}\neq 2\,; \qquad a+2\neq 2(a+1)\,; \qquad a+2\neq 2a+2\,; \qquad a\neq 0\ (*)\,.$

Riepilogando:

Parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=-1$	*Equazione di I° grado*	$x=3$
$a\neq 0 \ \wedge \ a\neq -1 \ \wedge \ a\neq-\frac{1}{2}$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_1=\dfrac{a+2}{a+1} \ \wedge \ x_2=3$
$a=0$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_2=3$ x_1 *non è accettabile (*)*
$a=-\frac{1}{2}$	*Equazione Completa con* $\Delta=0$	$x_1=x_2=3$
$\nexists\ a\in R$	*Equazione Completa con* $\Delta<0$	$-$

4. Un rete è lunga 50 metri. Si vuole tagliare la rete in due parti per delimitare un'aiuola quadrata e un'aiuola rettangolare di larghezza 4 m. Come dovrà essere tagliata la rete in modo che la somma delle aree delle due aiuole sia minima?

<u>Soluzione</u>

Poniamo la prima parte $= x$ *, con* $0 < x < 50$.

La seconda parte $= 50 - x$.

Utilizziamo la prima parte x *per delimitare il quadrato.*

Il lato del quadrato è $\frac{x}{4}$. *L'area del quadrato è* $\frac{x^2}{16}$.

Utilizziamo la seconda parte $50 - x$ *per delimitare il rettangolo.*

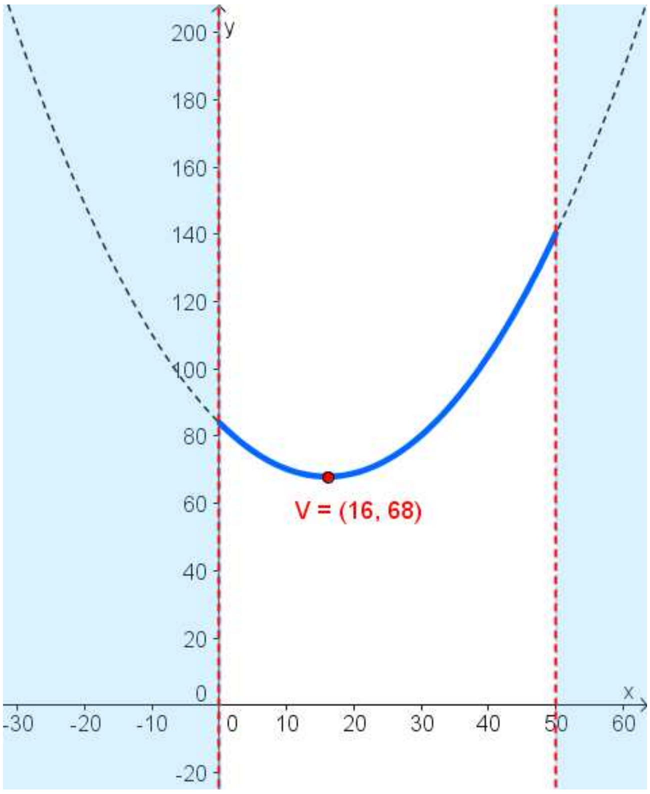
La lunghezza del rettangolo è $\frac{50-x}{2} - 4$. *L'area del rettangolo è* $4 \cdot \left(\frac{50-x}{2} - 4\right) = 100 - 2x - 16 = 84 - 2x$.

La funzione somma delle aree delle due aiuole da rendere minima è:

$$S(x) = \frac{x^2}{16} - 2x + 84 ;$$

Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità positiva.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{16}} = 16 .$$



Considerando soltanto il ramo della parabola che soddisfa le limitazioni geometriche $0 < x < 50$,

si ricava che il valore minimo si ha nel vertice V della parabola.

Concludiamo che il lato del quadrato è $l = \frac{x}{4} = \frac{16}{4}\ m = 4\ m$.

Mentre la lunghezza del rettangolo è $b = \frac{50-x}{2} - 4 = \left(\frac{50-16}{2} - 4\right)\ m = 13\ m$.