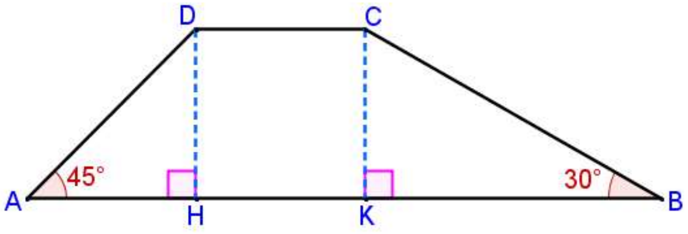
Classe **2B Liceo Scientifico** 29 maggio 2024

Prova di Matematica: *Algebra – Geometria*

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$\|x-5\|-\|3+2x\|=0$	$\|x-5\|-1+\sqrt{3}=0$	$\|x^2-4\|+\|-2x\|+5x=0$
$\sqrt[4]{5x+1}=\sqrt[4]{x^2+3x-2}$	$\sqrt[2]{x+4}=x-2$	

2. Nel trapezio ABCD, nella figura a lato, la base minore è il doppio dell'altezza. Sapendo che l'altezza misura $12\ cm$, determina il perimetro del trapezio.



3. In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che il perimetro del triangolo misura $48\ cm$, determina l'area del triangolo.

Soluzione

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$$|x-5|-|3+2x|=0$$

$|x-5|=|3+2x|$;

$x-5=-(3+2x)$	$\vee$	$x-5=+(3+2x)$
$x-5=-3-2x$	$\vee$	$x-5=3+2x$
$3x=5-3$	$\vee$	$x-2x=5+3$
$3x=2$	$\vee$	$-x=8$
$x=\frac{2}{3}$	$\vee$	$x=-8$

L'insieme delle soluzioni è $S=\{\frac{2}{3},-8\}$.

$$|x-5|-1+\sqrt{3}=0$$

$|x-5|=1-\sqrt{3}$; *Essendo* $1-\sqrt{3}<0$ *l'equazione è impossibile .*

$$\left|x^2-4\right|+|-2x|+5x=0$$

Studiamo i segni degli argomenti dei valori assoluti:

Primo V.A. ≥ 0	$x^2-4\geq 0$	$x\leq -2 \quad \vee \quad x\geq +2$
Secondo V.A. ≥ 0	$-2x\geq 0$	$x\leq 0$

	-2		0		$+2$	
+	●	-		-	●	+
+		+	●	-		-

Esistono 4 casi:

$x<-2$	$+(x^2-4)+(-2x)+5x=0$; $x^2-4-2x+5x=0$; $x^2+3x-4=0$;	$\Delta=9+16=25$; $x_{1,2}=\frac{-3\mp\sqrt{25}}{2\cdot 1}=$ $x_1=\frac{-3-5}{2}=-4$; $x_2=\frac{-3+5}{2}=+1$ Soluzione accettabile $x_1=-4$.
$-2\leq x<0$	$-(x^2-4)+(-2x)+5x=0$; $-x^2+4-2x+5x=0$; $x^2-3x-4=0$;	$\Delta=9+16=25$; $x_{1,2}=\frac{3\mp\sqrt{25}}{2\cdot 1}=$ $x_3=\frac{3-5}{2}=-1$; $x_4=\frac{3+5}{2}=+4$ Soluzione accettabile $x_3=-1$.
$0\leq x<2$	$-(x^2-4)-(-2x)+5x=0$; $-x^2+4+2x+5x=0$; $x^2-7x-4=0$;	$\Delta=49+16=65$; $x_{1,2}=\frac{7\mp\sqrt{65}}{2\cdot 1}=$ $x_5=\frac{7-\sqrt{65}}{2}$; $x_6=\frac{7+\sqrt{65}}{2}$ Nessuna Soluzione accettabile .
$x\geq 2$	$+(x^2-4)-(-2x)+5x=0$; $x^2-4+2x+5x=0$; $x^2+7x-4=0$;	$\Delta=49+16=65$; $x_{1,2}=\frac{-7\mp\sqrt{65}}{2\cdot 1}=$ $x_5=\frac{-7-\sqrt{65}}{2}$; $x_6=\frac{-7+\sqrt{65}}{2}$ Nessuna Soluzione accettabile .

L'insieme delle soluzioni è $S=\{-4,-1\}$.

$\sqrt[4]{5x+1} = \sqrt[4]{x^2+3x-2}$

$$\begin{cases} 5x+1 \geq 0 \\ 5x+1 = x^2+3x-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{5} \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{5} \\ x_1 = -1 & \textit{non accettabile} \\ x_2 = +3 & \textit{accettabile} \end{cases}$$

Risolvo: $x^2-2x-3=0$; $\quad \dfrac{\Delta}{4} = (-1)^2 - 1 \cdot (-3) = 1+3 = 4$; $\quad x_{1,2} = \dfrac{1 \mp \sqrt{4}}{1} = \begin{matrix} x_1 = 1-2 = -1 \\ x_2 = 1+2 = +3 \end{matrix}$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S = \{+3\}}$.

$\sqrt[2]{x+4} = x-2$;

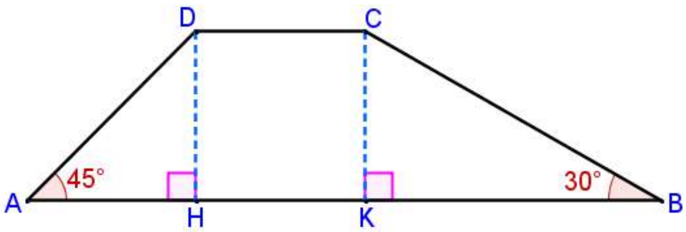
$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+4 = (x-2)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x = 5}.$$

Risolvo $x+4 = (x-2)^2$; $\quad x+4 = x^2-4x+4$; $\quad x^2-5x=0$; $\quad x \cdot (x-5) = 0$; $\quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{matrix}$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S = \{+5\}}$.

2. Nel trapezio ABCD, nella figura a lato, la base minore è il doppio dell'altezza. Sapendo che l'altezza misura 12 cm, determina il perimetro del trapezio.

$$\begin{cases} \overline{DC} = 2 \cdot \overline{DH} \\ \overline{DH} = 12\ cm \\ \hat{A} = 45° \\ \hat{B} = 30° \end{cases} \qquad p = ?$$



Soluzione

$\overline{DC} = 2 \cdot \overline{DH} = 2 \cdot 12\ cm = 24\ cm$.

Essendo l'angolo $\hat{A} = 45°$ *e il triangolo ADH rettangolo in H, anche* $A\hat{D}H = 45°$.

Pertanto il triangolo ADH è rettangolo ed isoscele sulla base AD. Quindi: $\overline{AH} = \overline{DH} = 12\ cm$.

Applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ADH :

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{DH}^2} = \sqrt{12^2+12^2}\ cm = \sqrt{144+144}\ cm = \sqrt{144} \cdot \sqrt{2}\ cm = 12\sqrt{2}\ cm.$$

Essendo l'angolo $\hat{B} = 30°$, *il triangolo BCK risulta essere la metà del triangolo equilatero di semibase CK.*

Quindi $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{CK} = 2 \cdot 12\ cm = 24\ cm$.

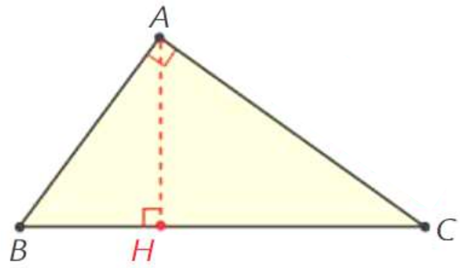
Applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCK :

$$\overline{KB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CK}^2} = \sqrt{24^2-12^2}\ cm = \sqrt{576-144}\ cm = \sqrt{432}\ cm = \sqrt{144} \cdot \sqrt{3}\ cm = 12\sqrt{3}\ cm.$$

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{KB} = \left(12+24+12\sqrt{3}\right) cm = \left(36+12\sqrt{3}\right) cm.$$

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD} = \left(36+12\sqrt{3}+24+24+12\sqrt{2}\right) cm = \boldsymbol{\left(84+12\sqrt{3}+12\sqrt{2}\right) cm}.$$

3. In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che il perimetro del triangolo misura $48\,cm$, determina l'area del triangolo.



<u>*Soluzione*</u>

Poniamo la misura della proiezione del cateto sull'ipotenusa $\overline{HC} = x$.

Si ricava: $\overline{AC} = \frac{5}{4}x$. *Il dominio di x è:* $0 < x < 24$.

Applicando il primo teorema di Euclide si ha:

$$\overline{AC}^2 = \overline{HC} \cdot \overline{BC} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{HC}} = \frac{\left(\frac{5}{4}x\right)^2}{x} = \frac{25}{16}x .$$

$$Si\ ricava\ poi:\ \overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC} = \frac{25}{16}x - x = \frac{9}{16}x .$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{\frac{9}{16}x \cdot \frac{25}{16}x} = \sqrt{\frac{225}{256}x^2} = \frac{15}{16}x .$$

Ricordando che: $p = 48\,cm$ *si ha:*

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 48\,cm$;

$$\frac{15}{16}x + \frac{25}{16}x + \frac{5}{4}x = 48 ; \qquad \frac{15 + 25 + 20}{16}x = 48 ; \qquad \frac{60}{16}x = 48 ; \qquad x = \frac{16}{60} \cdot 48 ; \qquad x = \frac{64}{5} .$$

$$\overline{AB} = \frac{15}{16} \cdot \frac{64}{5}\ cm = 12\ cm .$$

$$\overline{AC} = \frac{5}{4} \cdot \frac{64}{5}\ cm = 16\ cm .$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16\ cm^2 = \mathbf{96}\ cm^2 .$$