

Prova di Matematica: *Sistemi e problemi di I grado*

1. Stabilisci, senza risolverli, il tipo dei seguenti sistemi lineari (determinato, indeterminato, impossibile):

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ y - 2x + 2 = 0 \end{cases}$ Sistema _____ | $\begin{cases} y - 3x - 2 = 0 \\ x - \frac{1}{3}y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ Sistema _____ | $\begin{cases} 3y - \frac{1}{3}x = \frac{3}{4} \\ 2x + 18y = 1 \end{cases}$ Sistema _____ |
|---|---|---|

2. Risolvi i seguenti sistemi:

| | |
|--|--|
| $\begin{cases} \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}y = -1 \\ \frac{4}{5}y + x - 2 = -\frac{x}{2} \end{cases}$ con due metodi a tua scelta | $\begin{cases} a(x + y) - 1 = 0 \\ ax + 3y - ay + x = 2 \end{cases}$ con un metodo a tua scelta |
|--|--|

3. Su un carro viene caricata della legna fino a quadruplicare il peso del carro vuoto. Giunto a destinazione il conducente scarica metà della legna trasportata, riducendo il peso complessivo del carro a 200 kg. Qual era il peso originale della legna trasportata? Quale il peso del carro a vuoto?
4. Un litro di una miscela, che contiene per il 30% il liquido A, per il 20% il liquido B e per il 50% il liquido C, pesa 940 g. Un litro di una seconda miscela, che contiene per il 20% il liquido A, per il 60% il liquido B e per il 20% il liquido C, pesa 880 g. Mescolando queste due miscele con un litro del liquido A e un litro del liquido B, si ottengono 4 litri di una nuova miscela, che pesa 3720. Determina i pesi specifici dei tre liquidi A, B e C.

Soluzione

1. Stabilisci, senza risolverli, il tipo dei seguenti sistemi lineari (determinato, indeterminato, impossibile):

| | | | | | |
|---|-------------------------------|---|---------------------------------|---|-------------------------------|
| $\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ y - 2x + 2 = 0 \end{cases}$ | Sistema impossibile | $\begin{cases} y - 3x - 2 = 0 \\ x - \frac{1}{3}y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ | Sistema indeterminato | $\begin{cases} 3y - \frac{1}{3}x = \frac{3}{4} \\ 2x + 18y = 1 \end{cases}$ | Sistema determinato |
| $\frac{a}{a'} = -2 \quad \frac{b}{b'} = -2 \quad \frac{c}{c'} = -\frac{1}{2}$ | | $\frac{a}{a'} = -3 \quad \frac{b}{b'} = -3 \quad \frac{c}{c'} = -3$ | | $\frac{a}{a'} = -\frac{1}{6} \quad \frac{b}{b'} = \frac{1}{6}$ | |

2. Risolvi i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}y = -1 \\ \frac{4}{5}y + x - 2 = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}y = -1 & \text{moltiplicando per 8} \\ \frac{4}{5}y + x - 2 = -\frac{x}{2} & \text{moltiplicando per 10} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ 8y + 10x - 20 = -5x \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ 15x + 8y = 20 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}\right) \neq \left(\frac{b}{b'} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}\right) \quad \text{Sistema determinato}$$

Metodo di riduzione

$$\begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ 15x + 8y = 20 \end{cases}$$

$$2 \cdot \begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ 15x + 8y = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 8y = -16 & - \\ 15x + 8y = +20 & = \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad 9x = 36; \quad x = 4.$$

$$5 \cdot \begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ 15x + 8y = 20 \end{cases} \quad \begin{cases} 15x + 20y = -40 & - \\ 15x + 8y = 20 & = \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad 12y = -60; \quad y = -5.$$

La soluzione è $(x = 4; y = -5)$.

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} 3x + 4y = -8 \\ 15x + 8y = 20 \end{cases}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 15 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 15 \cdot 4 = 24 - 60 = -36 \neq 0 \quad \text{Sistema determinato}$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 20 & 8 \end{vmatrix} = -8 \cdot 8 - 20 \cdot 4 = -64 - 80 = -144.$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 3 \cdot 20 - 15 \cdot (-8) = 60 + 120 = 180.$$

$$\text{La soluzione è } \left(x = \frac{D_x}{D} = \frac{-144}{-36} = 4; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{180}{-36} = -5\right)$$

2. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y :

$$\begin{cases} a(x+y) - 1 = 0 \\ ax + 3y - ay + x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + ay = 1 \\ (a+1)x + (3-a)y = 2 \end{cases}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} a & a \\ a+1 & 3-a \end{vmatrix} = a \cdot (3-a) - a \cdot (a+1) = 3a - a^2 - a^2 - a = 2a - 2a^2 = 2a \cdot (1-a)$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 3-a \end{vmatrix} = 1 \cdot (3-a) - 2 \cdot a = 3 - a - 2a = 3 - 3a = 3 \cdot (1-a)$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ a+1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot a - 1 \cdot (a+1) = 2a - a - 1 = a - 1 = -(1-a)$$

Se $D \neq 0$ cioè

$$\text{Se } 2a \cdot (1-a) \neq 0; \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \Rightarrow \left(x = \frac{D_x}{D} = \frac{3 \cdot (1-a)}{2a \cdot (1-a)} = \frac{3}{2a}; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-(1-a)}{2a \cdot (1-a)} = -\frac{1}{2a} \right)$$

$$\text{Se } a = 0; \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{Sistema impossibile}$$

$$\text{Se } a = 1; \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{Sistema indeterminato}$$

Riepilogando:

| Valore del parametro | Tipo di equazione | Soluzione |
|--|------------------------------|--|
| $a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq 1$ | <i>Sistema determinato</i> | $\left(\frac{3}{2a}; -\frac{1}{2a} \right)$ |
| $a = 0$ | <i>Sistema impossibile</i> | <i>Nessuna soluzione</i> |
| $a = 1$ | <i>Sistema indeterminato</i> | ∞ soluzioni |

- 4. Su un carro viene caricata della legna fino a quadruplicare il peso del carro vuoto. Giunto a destinazione il conducente scarica metà della legna trasportata, riducendo il peso complessivo del carro a 200 kg. Qual era il peso originale della legna trasportata? Quale il peso del carro a vuoto?**

Soluzione

Poniamo il peso del carro vuoto = x , mentre il peso originale della legna = y $x > 0, \quad y > 0.$

Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4x \\ x + \frac{y}{2} = 200 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 2x + y = 400 \end{cases} \quad \left(\frac{a}{a'} = \frac{-3}{2} = -\frac{2}{3} \right) \neq \left(\frac{b}{b'} = \frac{1}{1} = 1 \right) \quad \text{Sistema determinato}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2x + 3x = 400 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 5x = 400 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = 80 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \cdot 80 = 240 \\ - \end{cases}$$

Il peso del carro a vuoto = 80 kg.

Il peso originale della legna trasportata = 240 kg.

4. Un litro di una miscela, che contiene per il 30% il liquido A, per il 20% il liquido B e per il 50% il liquido C, pesa 940 g. Un litro di una seconda miscela, che contiene per il 20% il liquido A, per il 60% il liquido B e per il 20% il liquido C, pesa 880 g. Mescolando queste due miscele con un litro del liquido A e un litro del liquido B, si ottengono 4 litri di una nuova miscela, che pesa 3720. Determina i pesi specifici dei tre liquidi A, B e C.

Soluzione

Poniamo il peso del liquido A = x , il peso del liquido B = y e il peso del liquido C = z . $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} 30\% x + 20\% y + 50\% z = 940 \\ 20\% x + 60\% y + 20\% z = 880 \\ 940 + 880 + x + y = 3720 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{30}{100}x + \frac{20}{100}y + \frac{50}{100}z = 940 \\ \frac{20}{100}x + \frac{60}{100}y + \frac{20}{100}z = 880 \\ x + y = 3720 - 940 - 880 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{2}{10}y + \frac{5}{10}z = 940 \\ \frac{2}{10}x + \frac{6}{10}y + \frac{2}{10}z = 880 \\ x + y = 1900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 9400 \\ 2x + 6y + 2z = 8800 \\ x = 1900 - y \end{cases} \quad \begin{cases} 3(1900 - y) + 2y + 5z = 9400 \\ 2(1900 - y) + 6y + 2z = 8800 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 5700 - 3y + 2y + 5z = 9400 \\ 3800 - 2y + 6y + 2z = 8800 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + 5z = 3700 \\ 4y + 2z = 5000 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5z - 3700 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 4(5z - 3700) + 2z = 5000 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20z - 14800 + 2z = 5000 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 22z = 19800 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} z = 900 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 \cdot 900 - 3700 = 800 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1900 - 800 = 1100 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1100 \\ y = 800 \\ z = 900 \end{cases}$$

Pertanto il peso specifico del liquido A è 1100 g/l, il peso specifico del liquido B è 800 g/l, il peso specifico del liquido C è 900 g/l.