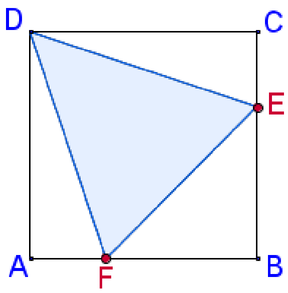
Classe **2A Liceo Scientifico** 26 marzo 2024

Prova di Matematica: Equazioni di II grado - Parabola

1. Risolvi la seguente equazione: $\frac{6}{5x+10} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{2x^2+3x-2}$

2. Determina per quali valori di k le soluzioni dell'equazione $(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k + 2 = 0$, con $k \neq 1$:

- **a. sono reali ed opposte;**
- **b. sono reali e la loro somma è 1;**
- **c. sono reali e la somma dei loro reciproci è uguale a 8;**
- **d. sono reali e antireciproche;**
- **e. sono reali ed una soluzione è uguale a 2.**



3. In figura è rappresentato un quadrato di lato 4 cm. $\overline{BE} = 2\,\overline{AF}$.
Determina $\overline{AF}$ in modo che l'area del triangolo DEF sia minima.

4. Determina l'area del trapezio isoscele iscritto nella semicirconferenza di raggio $r = 10\,cm$ sapendo che l'altezza del trapezio è i 2/3 della base minore.

Soluzione

$$\frac{6}{5x+10} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{2x^2+3x-2} \;;$$

Fattorizzo: $2x^2 + 3x - 2 =$ $\quad p = -2 \cdot 2 = -4 \qquad s = 3$

$= \; 2x^2 - x + 4x - 2 \; = \; x(2x-1) + 2(2x-1) \; = \; (2x-1)(x+2)$ $\quad a = -1 \quad \wedge \quad b = +4$

$$\frac{6}{5(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{(2x-1)(x+2)} = 0 \;; \qquad C.E.: \; x \neq \mp 2 \quad \wedge \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$6(x-2)(2x-1) - 5(2x-1) - 5(x-2) = 0 \;;$ $\quad m.c.m. = 5(x+2)(x-2)(2x-1)$

$6(2x^2 - 5x + 2) - 10x + 5 - 5x + 10 = 0 \;;$

$12x^2 - 30x + 12 - 10x + 5 - 5x + 10 = 0 \;;$

$12x^2 - 45x + 27 = 0 \;;$

$4x^2 - 15x + 9 = 0 \;;$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-15)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 225 - 144 = 81$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{15 \mp 9}{2 \cdot 4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{15-9}{8} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} & accettabile \\ x_2 = \dfrac{15+9}{8} = \dfrac{24}{8} = 3 & accettabile \end{cases}$$

Determina per quali valori di k le soluzioni dell'equazione $(k-1)x^2-2(k+1)x+k+2=0$, con $k \neq 1$:

a. **sono reali ed opposte;**
b. **sono reali e la loro somma è 1;**
c. **sono reali e la somma dei loro reciproci è uguale a 8 ;**
d. **sono reali e antireciproche;**
e. **sono reali ed una soluzione è uguale a 2.**

Soluzione a

Determiniamo innanzitutto le condizioni di realtà delle soluzioni:

$\frac{\Delta}{4} \geq 0$; $\left(\frac{B}{2}\right)^2 - A \cdot C \geq 0$; $(-k-1)^2-(k-1)\cdot(k+2) \geq 0$;

$k^2+1+2k-k^2-2k+k+2 \geq 0$; $k+3 \geq 0$; $k \geq -3$.

Le soluzioni sono opposte se $b=0$; $-2(k+1)=0$; $k=-1$

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

Soluzione b

Dalla relazione: $x_1+x_2=-\frac{B}{A}$ *si ha:* $-\frac{B}{A}=1$;

$-\frac{-2(k+1)}{k-1}=1$; $\frac{2k+2}{k-1}=1$; $2k+2=k-1$; $k=-3$;

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

Soluzione c

La relazione: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{B}{A}}{\frac{C}{A}} = -\frac{B}{C}$.

Si ottiene:

$-\frac{B}{C}=8$; $-\frac{-2(k+1)}{k+2}=8$; $2(k+1)=8(k+2)$; $2k+2=8k+16$ $6k=-14$; $k=-\frac{7}{3}$.

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

Soluzione d

Le soluzioni sono reali e antireciproche equivale a:

$x_1=-\frac{1}{x_2}$; $x_1 \cdot x_2=-1$; *cioè:* $\frac{C}{A}=-1$

Sostituendo si ha:

$\frac{k+2}{k-1}=-1$; $k+2=-1(k-1)$; $k+2=-k+1$; $2k=-1$; $k=-\frac{1}{2}$.

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

Soluzione e

Imponiamo che $x=2$ *sia soluzione dell'equazione:* $(k-1)x^2-2(k+1)x+k+2=0$

$(k-1)\cdot 2^2-2(k+1)\cdot 2+k+2=0$;

$(k-1)\cdot 4-4(k+1)+k+2=0$;

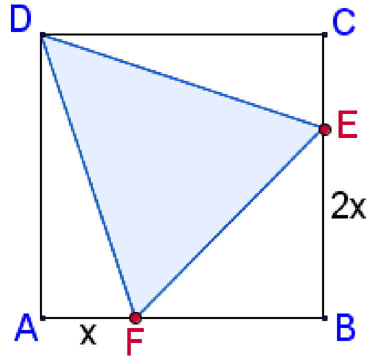
$4k-4-4k-4+k+2=0$;

$k-6=0$;

$k=6$.

Valore accettabile perché rientra nelle condizioni di realtà delle soluzioni precedentemente determinate.

In figura è rappresentato un quadrato di lato 4 cm. $\overline{BE} = 2\,\overline{AF}$. Determina $\overline{AF}$ in modo che l'area del triangolo DEF sia minima.



<u>*Soluzione*</u>

Poniamo la misura del segmento $\overline{AF} = x$ *, e* $\overline{BE} = 2x$ *con* $0 \le x \le 2$.

Pertanto l'area del triangolo DEF da rendere minima è data da:

$S_{DEF} = S_{ABCD} - S_{ADF} - S_{BEF} - S_{CDE}$.

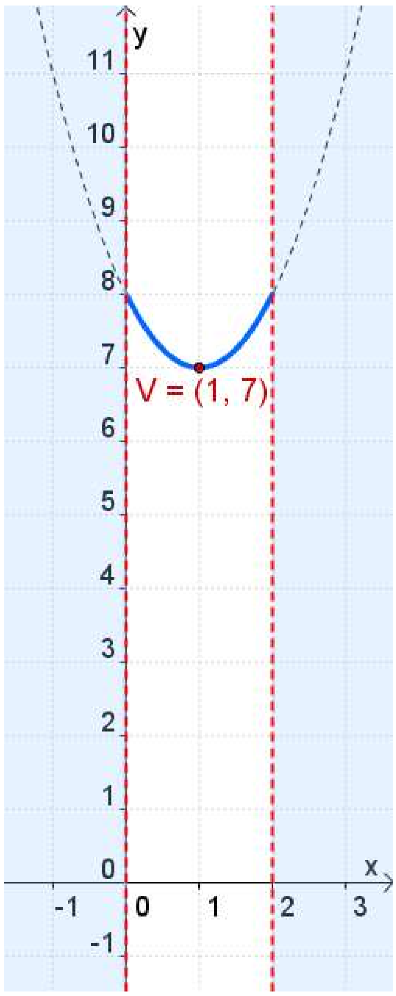
Si ottiene la funzione:

$$S(x) = 4^2 - \frac{x \cdot 4}{2} - \frac{2x \cdot (4-x)}{2} - \frac{4 \cdot (4-2x)}{2} \;;$$

$S(x) = 16 - 2x - x \cdot (4-x) - 2 \cdot (4-2x)$;

$S(x) = 16 - 2x - 4x + x^2 - 8 + 4x$;

$S(x) = x^2 - 2x + 8$;



Essa rappresenta l'equazione di una parabola con concavità positiva.

Tenendo anche conto delle limitazioni $0 \le x \le 2$,

si ha che il valore minimo è nel vertice.

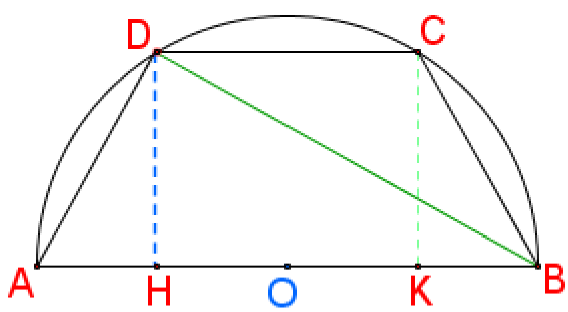
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1 \;.$$

Pertanto la misura di $\overline{AF} = 1$.

L'area minima del triangolo DEF è:

$S_{Max}(x) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 8 = 7$.

4. Determina l'area del trapezio isoscele iscritto nella semicirconferenza di raggio $r = 10\ cm$ sapendo che l'altezza del trapezio è i 2/3 della base minore.



Soluzione

$\overline{AB} = 20\ cm$.

Poniamo la misura della base minore: $\overline{DC} = x$, $0 < x < 20$.

Si ricava: $\overline{DH} = \frac{2}{3}x$;

$\overline{AH} = \dfrac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2} = \dfrac{20 - x}{2} = 10 - \dfrac{x}{2}$;

$\overline{HB} = 20 - \left(10 - \dfrac{x}{2}\right) = 10 + \dfrac{x}{2}$.

Dal secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo ABD si ottiene:

$\overline{DH}^{\,2} = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$; $\left(\dfrac{2}{3}x\right)^2 = \left(10 - \dfrac{x}{2}\right) \cdot \left(10 + \dfrac{x}{2}\right)$;

$\dfrac{4}{9}x^2 = 100 - \dfrac{x^2}{4}$; $16x^2 = 3600 - 9x^2$;

$25x^2 = 3600$; $x^2 = 144$; $x_{1,2} = \mp\sqrt{144} = \mp 12$.

Scartando la soluzione negativa si ha che:

$\overline{DC} = 12\ cm$; $\overline{DH} = \dfrac{2}{3} \cdot 12\ cm = 8\ cm$.

Pertanto l'area del trapezio è:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{DH} = \frac{20 + 12}{2} \cdot 8\ cm^2 = 128\ cm^2 .$$