Classe *2A Liceo Scientifico*

Prova di Matematica : Disequazioni

1. Risolvi le seguenti disequazioni:

$$2(3-x)-\left(2-x^2\right) \leq 1+(x+3)^2$$

$$\frac{x-3}{x+1} \leq \frac{x-1}{x-3}-\frac{2}{x^2-2x-3}$$

2. Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} x+9>4x \\ 1-(2+x)(2-x) \leq (x+1)^2 \\ 2-(x-6) \geq 5+2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2\left(x^2+4\right)}{x-1} \geq 0 \\ \\ \dfrac{x^4+6x^2}{x^2-4} \geq 1 \end{cases}$$

3. Un rettangolo ha l'area di $50\ cm^2$. Quanto deve misurare la sua base affinché il perimetro non superi i $30\ cm$?

Soluzione

1. Risolvi le seguenti disequazioni:

$\mathbf{2(3-x)-(2-x^2)\leq 1+(x+3)^2}$;

$6-2x-2+x^2\leq 1+x^2+9+6x$;

$-2x-6x\leq -6+2+1+9$;

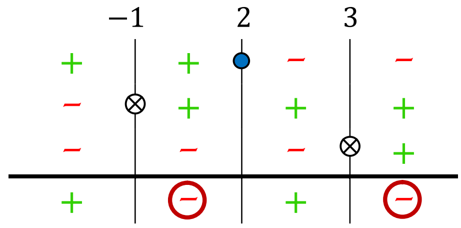
$-8x\leq 6$; $\quad 8x\geq -6$; $\quad \boldsymbol{x\geq -\frac{3}{4}}$ $\quad \left[-\frac{3}{4},+\infty\right[$

$\boldsymbol{\frac{x-3}{x+1}\leq\frac{x-1}{x-3}-\frac{2}{x^2-2x-3}}$; $\quad \frac{x-3}{x+1}-\frac{x-1}{x-3}+\frac{2}{(x+1)(x-3)}\leq 0$;

$\frac{(x-3)^2-(x-1)(x+1)+2}{(x+1)(x-3)}\leq 0$; $\quad \frac{x^2+9-6x-(x^2-1)+2}{(x+1)(x-3)}\leq 0$;

$\frac{x^2+9-6x-x^2+1+2}{(x+1)(x-3)}\leq 0$; $\quad \frac{12-6x}{(x+1)(x-3)}\leq 0$;

$I\ F\geq 0$	$12-6x\geq 0$	$x\leq +2$
$II\ F>0$	$x+1>0$	$x>-1$
$III\ F>0$	$x-3>0$	$x>+3$

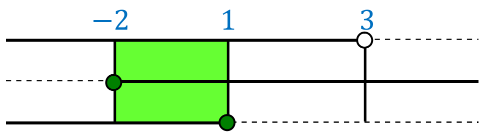


$-1<x\leq 2 \quad \vee \quad x>3$

2. Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni:

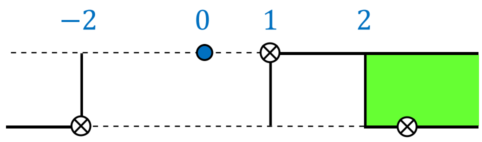
$\begin{cases}\boldsymbol{x+9>4x}\\ \boldsymbol{1-(2+x)(2-x)\leq (x+1)^2}\\ \boldsymbol{2-(x-6)\geq 5+2x}\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x-4x>-9\\ 1-(4-x^2)\leq x^2+1+2x\\ 2-x+6\geq 5+2x\end{cases}$ $\quad \begin{cases}-3x>-9\\ 1-4+x^2\leq x^2+1+2x\\ -x-2x\geq -2-6+5\end{cases}$

$\begin{cases}3x<9\\ -4\leq 2x\\ -3x\geq -3\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x<3\\ 2x\geq -4\\ 3x\leq 3\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x<+3\\ x\geq -2\\ x\leq +1\end{cases}$



La soluzione è $\quad \boldsymbol{-2\leq x\leq 1}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2(x^2+4)}{x-1} \geq 0 \\ \dfrac{x^4+6x^2}{x^2-4} \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 1 \quad \vee \quad x = 0 \\ x < -2 \quad \vee \quad x > 2 \end{cases}$$



La soluzione è $\boldsymbol{x} > 2$

Risoluzione della prima disequazione:

$$\frac{x^2(x^2+4)}{x-1} \geq 0$$

Essendo: $x^2 \geq 0 \qquad \forall x \in R$

e $\quad x^2+4 \geq 0 \quad \forall x \in R$

Il segno della disequazione è dato dal segno del denominatore: $x-1>0\,;\quad x>1\ .$

Risoluzione della seconda disequazione:

$$\frac{x^4+6x^2}{x^2-4} \geq 1\,; \qquad \frac{x^4+6x^2}{x^2-4} - 1 \geq 0\,; \qquad \frac{x^4+6x^2-(x^2-4)}{x^2-4} \geq 0\,;$$

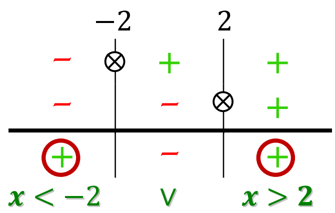
$$\frac{x^4+5x^2+4}{x^2-4} \geq 0\,; \qquad \frac{(x^2+1)(x^2+4)}{(x+2)(x-2)} \geq 0\,;$$

Essendo: $x^2+1 \geq 0 \qquad \forall x \in R$

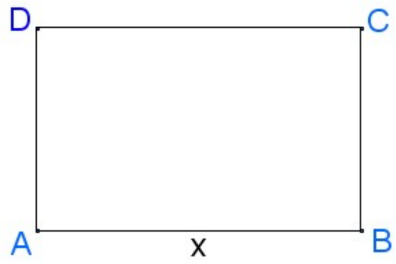
e $\quad x^2+4 \geq 0 \qquad \forall x \in R$

Il segno della disequazione è dato dal segno del denominatore:

$I\ F > 0$	$x+2>0$	$x>-2$
$II\ F > 0$	$x-2>0$	$x>+2$



3. Un rettangolo ha l'area di 50 cm^2. Quanto deve misurare la sua base affinché il perimetro non superi i 30 cm ?



$$\begin{cases} S_{ABCD} = 50\ cm^2 \\ p \leq 30\ cm \end{cases}$$

$\overline{AB} = ?$

Soluzione

Indichiamo con x la misura in centimetri della base del rettangolo,

cioè poniamo $\overline{AB} = x$, *con* $x > 0$.

Ricaviamo la misura in centimetri dell'altezza: $\overline{BC} = \frac{50}{x}$.

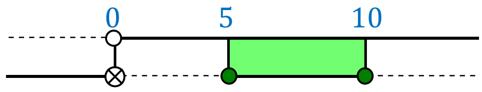
Ricaviamo poi la misura in centimetri del perimetro: $p = 2 \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = 2 \cdot \left(x + \frac{50}{x}\right) = 2x + \frac{100}{x}$.

In definitiva, la misura in centimetri della base deve soddisfare contemporaneamente le due disequazioni:

$x > 0$ *e* $2x + \frac{100}{x} \leq 30$.

Quindi il modello matematico che risolve il problema è il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x + \dfrac{100}{x} \leq 30 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \quad \vee \quad 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$



$\mathbf{5 \leq x \leq 10}$

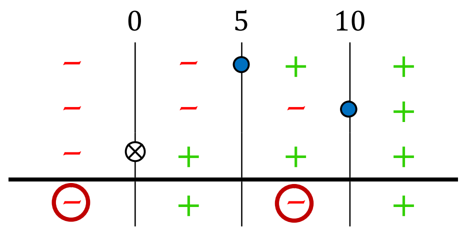
La misura della base del rettangolo può variare tra i 5 cm e i 10 cm, estremi inclusi.

Risoluzione della seconda disequazione:

$2x + \frac{100}{x} \leq 30$; $\qquad 2x + \frac{100}{x} - 30 \leq 0$; $\qquad \frac{2x^2 + 100 - 30x}{x} \leq 0$;

$\frac{2(x^2 - 15x + 50)}{x} \leq 0$; $\qquad \frac{2(x-5)(x-10)}{x} \leq 0$;

$I\ F \geq 0$	$x - 5 \geq 0$	$x \geq 5$
$II\ F > 0$	$x - 10 \geq 0$	$x \geq 10$
$III\ F > 0$	$x > 0$	$x > 0$



$x < 0 \quad \vee \quad 5 \leq x \leq 10$