Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2023-2024

Classe **2A Liceo Scientifico** 31 maggio 2024

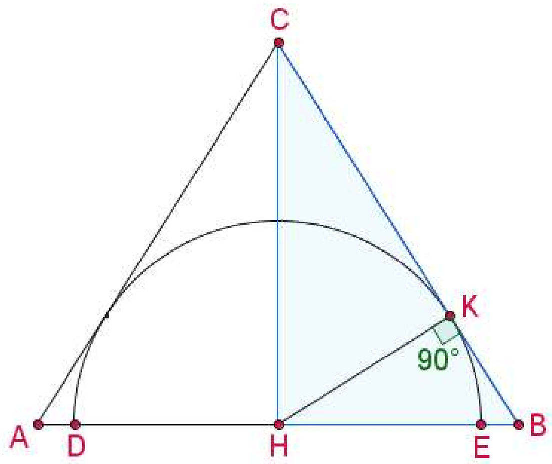
Prova di Matematica: *Algebra - Geometria*

1. **Risolvi le seguenti equazioni:**

$\sqrt[3]{x^3-8}=x-2$	$\|x-2\|-3=0$	$\|\,\|x-1\|-3\|=5$
$\sqrt{6+x}=3-\sqrt{3x+7}$	$\|x^2+x-2\|+x-1=0$	

2. **In un trapezio isoscele la base minore è lunga 3 cm e gli angoli adiacenti alla base maggiore hanno ampiezza di 30°. Sapendo che l'area del trapezio è $6\sqrt{3}\ cm^2$, determina il perimetro del trapezio.**

3. **Il triangolo isoscele ABC è circoscritto a una semicirconferenza di diametro $16\ cm$. Sapendo che il lato obliquo del triangolo è lungo $20\ cm$, determina la misura della base AB.**



Soluzione

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$\boldsymbol{\sqrt[3]{x^3-8} = x-2}$;

$x^3-8=(x-2)^3$; $\quad x^3-8=x^3-6x^2+12x-8$; $\quad 6x^2-12x=0$; $\quad 6x\cdot(x-2)=0$; $\quad \boldsymbol{x_1=0}$, $\boldsymbol{x_2=2}$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S=\{\,0\,,2\,\}}$.

$\boldsymbol{\sqrt{6+x} = 3-\sqrt{3x+7}}$

Riscriviamo l'equazione in modo da assicurare la concordanza di segno:

$\sqrt{6+x}+\sqrt{3x+7}=3$;

Determiniamo le condizioni di esistenza: $\begin{cases} 6+x\ge 0 \\ 3x+7\ge 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\ge -6 \\ x\ge -\dfrac{7}{3} \end{cases}$ $\quad x\ge -\dfrac{7}{3}\quad (A)$

Eleviamo ambo i membri al quadrato, si ottiene:

$\left(\sqrt{6+x}+\sqrt{3x+7}\right)^2=3^2$;

$6+x+3x+7+2\sqrt{(6+x)(3x+7)}=9$;

$4x+13+2\sqrt{18x+42+3x^2+7x}=9$;

$2\sqrt{3x^2+25x+42}=-4x-4$;

$\sqrt{3x^2+25x+42}=-2x-2$;

Risolviamo tale equazione imponendo la condizione di concordanza di segno: $-2x-2\ge 0$

$$\begin{cases} 2x+2\le 0 \\ \left(\sqrt{3x^2+25x+42}\right)^2=(-2x-2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\le -1 \quad (B) \\ x_1=-2 \quad \textit{accettabile perchè verifica le condizioni } (A) \textit{ e } (B) \\ x_2=+19 \quad \textit{non accettabile} \end{cases}$$

Risolviamo:

$\left(\sqrt{3x^2+25x+42}\right)^2=(-2x-2)^2$;

$3x^2+25x+42=4x^2+8x+4$;

$3x^2+25x+42=4x^2+8x+4$;

$x^2-17x-38=0$;

$\Delta=(-17)^2-4\cdot 1\cdot(-38)=289+152=441$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{17\mp\sqrt{441}}{2\cdot 1}=$ $\quad x_1=\dfrac{17-21}{2}=-\dfrac{4}{2}=-2$; $\quad x_2=\dfrac{17+21}{2}=+\dfrac{38}{2}=+19$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S=\{\,-2\,\}}$.

$\boldsymbol{|x-2|-3=0}$

$|x-2|=3$;

$x-2=-3 \quad \vee \quad x-2=+3$;

$x=2-3 \quad \vee \quad x=2+3$;

$\boldsymbol{x=-1} \quad \vee \quad \boldsymbol{x=5}$. $\qquad$ *L'insieme delle soluzioni è* $\boldsymbol{S=\{\,-1\,,5\,\}}$.

$|x^2 + x - 2| + x - 1 = 0$

$|x^2 + x - 2| = 1 - x\,;$

$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ +(x^2 + x - 2) = 1 - x \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ -(x^2 + x - 2) = 1 - x \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} -2 < x < 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 1 \\ x_1 = -3 \quad \textit{accettabile} \\ x_2 = +1 \quad \textit{accettabile} \end{cases}$	$\vee$	$\begin{cases} -2 < x < 1 \\ x_3 = -1 \quad \textit{accettabile} \\ x_4 = +1 \quad \textit{non accettabile} \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S = \{-3\,, -1\,, +1\,\}}$

Risolvo: $x^2 + x - 2 \geq 0\,; \qquad x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 1$

$x^2 + x - 2 = 0\,; \quad \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9\,; \quad x_{1,2} = \dfrac{-1 \mp \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = +\dfrac{2}{2} = +1 \end{array}$

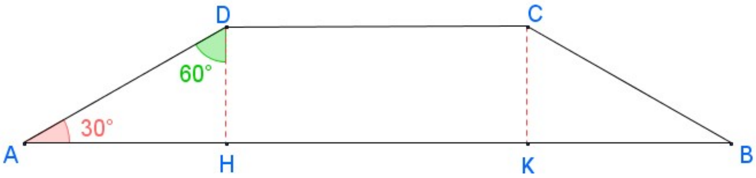
Risolvo: $x^2 + 2x - 3 = 0\,; \quad \dfrac{\Delta}{4} = 1^2 - 1 \cdot (-3) = 1 + 3 = 4\,; \quad x_{1,2} = \dfrac{-1 \mp \sqrt{4}}{1} = \begin{array}{l} x_1 = -1 - 2 = -3 \\ x_2 = -1 + 2 = +1 \end{array}$

$|\,|x - 1| - 3| = 5$

$\lvert x - 1\rvert - 3 = -5$	$\vee$	$\lvert x - 1\rvert - 3 = +5$
$\lvert x - 1\rvert = -2$		$\lvert x - 1\rvert = 8$
Equazione impossibile		$x - 1 = -8 \quad \vee \quad x - 1 = +8\,;$ $x = -7 \quad \vee \quad x = 9\,;$

L'insieme delle soluzioni è $\boldsymbol{S = \{\,-7\,, 9\,\}}$.

2. In un trapezio isoscele la base minore è lunga 3 cm e gli angoli adiacenti alla base maggiore hanno ampiezza di 30°. Sapendo che l'area del trapezio è $6\sqrt{3}\ cm^2$, determina il perimetro del trapezio.



Soluzione 1

Poniamo la misura di $\overline{AH} = x\,, \quad x > 0\,.$

Si ricavano:

$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{KB} = x + 3 + x = 2x + 3\,;$ $\qquad \overline{DH} = c_{30} = \dfrac{c_{60}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\overline{AH}}{\sqrt{3}} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}\,.$

Imponiamo che l'area del trapezio sia uguale a $6\sqrt{3}\,.$

$\dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DH} = 6\sqrt{3}\,;$ $\qquad \dfrac{(2x+3)+3}{2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}\,;$ $\qquad \dfrac{(2x+6)\cdot x}{2\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}\,;$

$(2x+6)\cdot x = 36\,;$ $\qquad 2x^2 + 6x - 36 = 0\,;$ $\qquad x^2 + 3x - 18 = 0\,;$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot 1 \cdot (-18) = 9 + 72 = 81\,.$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-3 \mp \sqrt{81}}{2\cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3-9}{2} = -\dfrac{12}{2} = -6 & \textit{Soluzione non accettabile} \\ x_2 = \dfrac{-3+9}{2} = \dfrac{6}{2} = +3 & \textit{Soluzione accettabile} \end{cases}$$

Si ottiene:

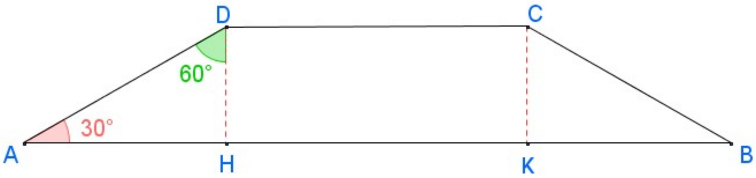
$\overline{AH} = 3\ cm\,;$ $\qquad \overline{AB} = (3+3+3)\ cm = 9\ cm\,;$

$\overline{AD} = i = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot c_{60} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AH} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3\ cm = \dfrac{6}{\sqrt{3}}\ cm = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\ cm = 2\sqrt{3}\ cm\,.$

Pertanto il perimetro misura:

$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = \left(9 + 2\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3}\right) cm = \left(12 + 4\sqrt{3}\right) cm\,.$

Soluzione 2



Poniamo la misura dell'altezza $\overline{DH} = x\,, \quad x > 0\,.$

Si ricavano:

$\overline{AD} = 2x$

$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DH}^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}\,x\,.$

$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{KB} = \sqrt{3}\,x + 3 + \sqrt{3}\,x = 3 + 2\sqrt{3}\,x\,.$

Imponiamo che l'area del trapezio sia uguale a $6\sqrt{3}\,.$

$S_{ABCD} = 6\sqrt{3}\,;$

$\dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DH} = 6\sqrt{3}\,;$ $\qquad \dfrac{3 + 2\sqrt{3}\,x + 3}{2} \cdot x = 6\sqrt{3}\,;$ $\qquad \left(6 + 2\sqrt{3}\,x\right)x = 12\sqrt{3}\,;$

$2\sqrt{3}x^2 + 6x - 12\sqrt{3} = 0\,;$

$\sqrt{3}x^2 + 3x - 6\sqrt{3} = 0\,;$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-6\sqrt{3}\right) = 9 + 72 = 81\,.$

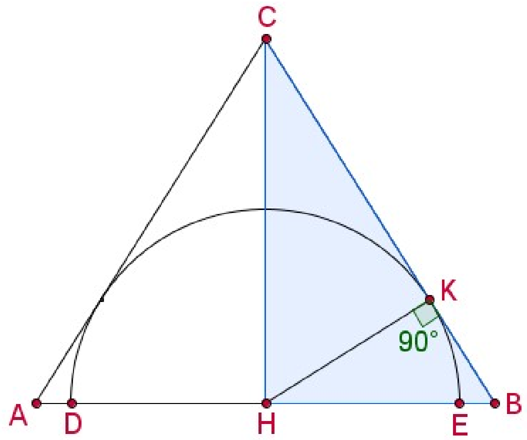
$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-3 \mp \sqrt{81}}{2\cdot\sqrt{3}} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3-9}{2\cdot\sqrt{3}} = -\dfrac{6}{\sqrt{3}} & \textit{Soluzione non accettabile} \\ x_2 = \dfrac{-3+9}{2\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} & \textit{Soluzione accettabile} \end{cases}$$

Si ottiene:

$\overline{DH} = \sqrt{3}\ cm$; $\overline{AD} = 2\sqrt{3}\ cm$; $\overline{AB} = \left(3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right) cm = 9\ cm$.

Pertanto il perimetro misura:

$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = \left(9 + 2\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3}\right) cm = \left(12 + 4\sqrt{3}\right) cm$.



3. Il triangolo isoscele ABC è circoscritto a una semicirconferenza di diametro $16\ cm$. Sapendo che il lato obliquo del triangolo è lungo $20\ cm$, determina la misura della base AB.

Soluzione

$\overline{HK} = r = \dfrac{\overline{CK}}{2} = 8\ cm$.

Poniamo la misura della proiezione: $\overline{BK} = x$, *con* $0 < x < 20$

Si ricava: $\overline{CK} = 20 - x$.

Dal teorema di Euclide 2 applicato al triangolo rettangolo BCH si ottiene:

$\overline{HK}^{\,2} = \overline{BK} \cdot \overline{CK}$; $8^{\,2} = x \cdot (20 - x)$; $64 = 20x - x^2$;

$x^2 - 20x + 64 = 0$; $\dfrac{\Delta}{4} = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac = (-10)^2 - 1 \cdot 64 = 100 - 64 = 36.$

$x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \dfrac{10 \mp \sqrt{36}}{1} = \begin{array}{l} x_1 = 10 - 6 = 4 \\ x_2 = 10 + 6 = 16 \end{array}$ *Soluzione accettabile* / *Soluzione accettabile*

Consideriamo la prima soluzione $x_1 = 4$, *si ha:*

$\overline{BK} = 4\ cm$, $\overline{CK} = 16\ cm$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BHK si ottiene:

$\overline{HB} = \sqrt{\overline{HK}^{\,2} + \overline{BK}^{\,2}} = \sqrt{8^2 + 4^2}\ cm = \sqrt{64 + 16}\ cm = \sqrt{80}\ cm = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5}\ cm = 4\sqrt{5}\ cm$.

Da cui si ricava la misura della base:

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{HB} = \mathbf{2\sqrt{5}\ cm}$.

Considerando la seconda soluzione $x_2 = 16\ cm$, *si ha:*

$\overline{BK} = 16\ cm$, $\overline{CK} = 4\ cm$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BHK si ottiene:

$\overline{HB} = \sqrt{\overline{HK}^{\,2} + \overline{BK}^{\,2}} = \sqrt{8^2 + 16^2} = \sqrt{64 + 256} = \sqrt{320} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{5} = 8\sqrt{5}\ cm$.

Da cui si ottiene la misura della base:

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{HB} = \mathbf{16\sqrt{5}\ cm}$.