Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2019-2020

Classe *2B Liceo Scientifico* *6 dicembre 2019*

Prova di Matematica : Piano cartesiano e retta

1. Risolvi graficamente il seguente sistema lineare: $\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{y+1}{2} \\ x+y=+3 \end{cases}$

2. Dato il fascio di rette di equazione: $kx-(k-1)y+k-2=0$, determina:

A. il tipo (fascio proprio / fascio improprio);

B. il centro del fascio;

C. l'equazione della retta c del fascio perpendicolare alla retta di equazione $2x-3=0$;

D. l'equazione della retta d del fascio perpendicolare alla retta di equazione $2x+y-3=0$;

E. l'equazione della retta e del fascio passante per il punto $P(4;\ -1)$;

F. l'equazione della retta f del fascio passante per l'origine degli assi cartesiani;

3. Dati nel piano cartesiano i punti: $\mathrm{A}(-3\ ;2)$, $\mathrm{B}(5\ ;-4)$ e $\mathrm{C}(3\ ;5)$, determina:

A. il perimetro del triangolo ABC;

B. l'area del triangolo ABC;

C. il quarto vertice D del parallelogramma ABCD;

D. i vertici del triangolo $\mathrm{A'B'C'}$ ottenuto dalla traslazione di vettore $\vec{v}(8;-3)$ del triangolo ABC e disegnalo.

Soluzione

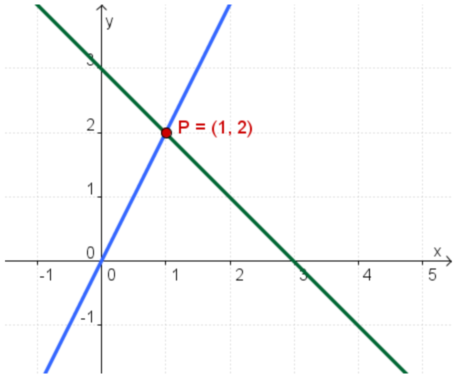
1. Risolvi graficamente il seguente sistema lineare:

$\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{y+1}{2} \\ x+y=+3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x+1=y+1 \\ y=-x+3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=2x \\ y=-x+3 \end{cases}$

$(m \neq m')$ *Sistema determinato*

oppure

$\left(\dfrac{a}{a'}=2\right) \neq \left(\dfrac{b}{b'}=-1\right)$



Dato il fascio di rette di equazione: $kx-(k-1)y+k-2=0$, determina:

- **A.** **il tipo (fascio proprio / fascio improprio);**
- **B.** **il centro del fascio;**
- **C.** **l'equazione della retta c del fascio perpendicolare alla retta s di equazione $2x-3=0$;**
- **D.** **l'equazione della retta d del fascio perpendicolare alla retta t di equazione $2x+y-3=0$;**
- **E.** **l'equazione della retta e del fascio passante per il punto $P(4;\,-1)$;**
- **F.** **l'equazione della retta f del fascio passante per l'origine degli assi cartesiani;**

Soluzione A

Si tratta di un fascio proprio di rette perché il coefficiente angolare dipende dal parametro k:

$m_{Fascio}=-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{k}{-(k-1)}=\dfrac{k}{k-1}$.

Soluzione B

Per $k=0 \quad \Rightarrow \quad 0\cdot x-(0-1)y+0-2=0\,; \qquad y=2$

Per $k=1 \quad \Rightarrow \quad 1\cdot x+(1-1)y+1-2=0\,; \qquad x=1$

Il centro del fascio ha coordinate: $C=(1\,;\,2)$.

Soluzione C

La retta $2x-3=0$ *è una retta parallela all'asse y.*

La retta richiesta c *del fascio è quindi parallela all'asse x , la sua equazione è* $y=2$.

Soluzione D

La retta $2x+y-3=0$ *ha coefficiente angolare* $m_t=-\frac{a}{b}=-\frac{2}{1}$.

Essendo $d\perp t \quad \Rightarrow \quad m_d=\frac{1}{2}$ *cioè:* $\frac{k}{k-1}=\frac{1}{2}\,; \quad C.E.:\ k\neq 1 \quad 2k=k-1; \quad k=-1$.

La retta richiesta d ha equazione: $-1x-(-1-1)y-1-2=0\,; \quad -x+2y-3=0\,; \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Soluzione E

Imponiamo il passaggio per il punto $P(4;\,-1)$:

$4k-(k-1)(-1)+k-2=0\,; \quad 4k+k-1+k-2=0\,; \quad 6k-3=0\,; \quad k=\dfrac{1}{2}$.

La retta richiesta e ha equazione: $\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{2}-1\right)y+\frac{1}{2}-2=0\,; \quad \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}=0\,; \quad y=-x+3$.

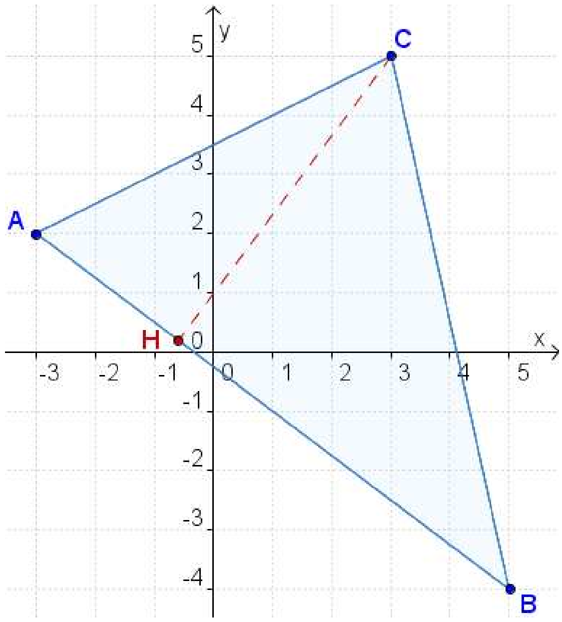
Soluzione F

La retta richiesta si ottiene per $k-2=0$ *cioè per* $k=2$.

La retta richiesta f ha equazione: $2x-(2-1)y+2-2=0\,; \quad 2x-y=0\,; \quad y=2x$.

3. Dati nel piano cartesiano i punti: $\mathbf{A(-3\,;2)}$, $\mathbf{B(5\,;-4)}$ e $\mathbf{C(3\,;5)}$, determina:

- **A. il perimetro del triangolo ABC;**
- **B. l'area del triangolo ABC;**
- **C. il quarto vertice D del parallelogramma ABCD;**
- **D. i vertici del triangolo A'B'C' ottenuto dalla traslazione di vettore $\vec{v}(8;-3)$ del triangolo ABC e disegnalo.**



Soluzione A

$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(-3-5)^2+(2+4)^2}=$

$=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10\,.$

$\overline{BC}=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-5)^2}=$

$=\sqrt{4+81}=\sqrt{85}\,.$

$\overline{AC}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(-3-3)^2+(2-5)^2}=$

$=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}\,.$

Pertanto il perimetro del triangolo ABC è:

$p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=10+\sqrt{85}+3\sqrt{5}.$

Soluzione B

Determiniamo l'equazione della retta AB:

$\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}\,;\qquad \dfrac{y-2}{-4-2}=\dfrac{x+3}{5+3}\,;\qquad \dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{x+3}{8}\,;$

$8(y-2)=-6(x+3)\,;\qquad 8y-16=-6x-18\,;$

$8y=-6x-2\,;\qquad y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\,;\qquad \left(m_{AB}=-\dfrac{3}{4}\right).$

Determiniamo l'equazione della retta CH passante per il vertice C e perpendicolare alla retta AB:

Essendo $CH\perp AB \quad\Rightarrow\quad m_{CH}=-\frac{1}{m_{AB}}=+\frac{4}{3}.$

L'equazione della retta CH è:

$y-y_C=m_{CH}(x-x_C)\,;\quad y-5=\dfrac{4}{3}\cdot(x-3)\,;\qquad y-5=\dfrac{4}{3}x-4\,;\qquad y=\dfrac{4}{3}x+1$

Determiniamo le coordinate del punto H, punto di intersezione delle rette CH e AB:

$H:\ \begin{cases}AB\\CH\end{cases}\quad \begin{cases}y=\dfrac{4}{3}x+1\\ y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\end{cases}\quad \begin{cases}-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{3}x+1\\ \text{—}\end{cases}\quad \begin{cases}-9x-3=16x+12\\ \text{—}\end{cases}\quad \begin{cases}25x=-15\\ \text{—}\end{cases}$

$\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}\\ \text{—}\end{cases}\quad \begin{cases}y=\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{3}{5}\right)+1=-\dfrac{4}{5}+1=\dfrac{1}{5}\end{cases}\qquad\Rightarrow\quad H\left(-\dfrac{3}{5}\,;\dfrac{1}{5}\right)$

Determiniamo la misura dell'altezza CH del triangolo:

$\overline{CH}=\sqrt{(x_C-x_H)^2+(y_C-y_H)^2}=\sqrt{\left(3+\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(5-\dfrac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{15+3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{25-1}{5}\right)^2}=$

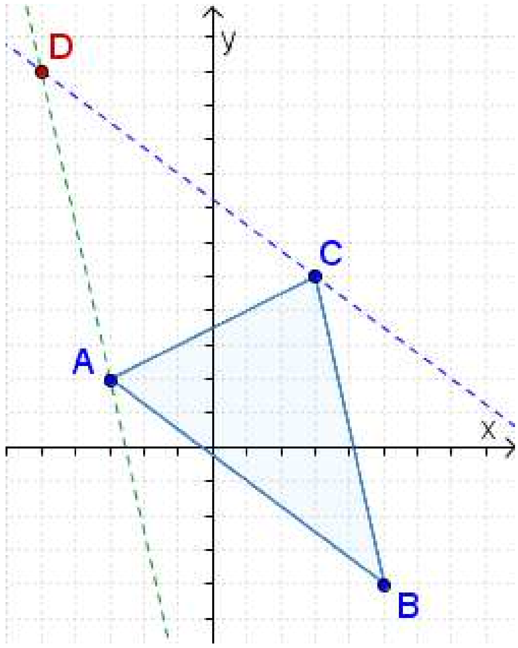
$=\sqrt{\left(\dfrac{18}{5}\right)^2+\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{324}{25}+\dfrac{576}{25}}=\sqrt{\dfrac{900}{25}}=\sqrt{36}=6\,.$

Pertanto l'area del triangolo è:

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CH}=\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot 6=30\,.$

Soluzione C

Il coefficiente angolare della retta AB è: $\boxed{m_{AB} = -\frac{3}{4}}$.



Essendo $CD \parallel AB \quad \Rightarrow \quad m_{CD} = m_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Determiniamo l'equazione della retta CD passante per il vertice C e parallela alla retta AB: $y - y_C = m_{CD}(x - x_C)$;

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x-3) \ ; \qquad y - 5 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4} \ ; \qquad \boxed{y = -\frac{3}{4}x + \frac{29}{4}}.$$

Determiniamo il coefficiente angolare della retta BC:

$$m_{BC} = \frac{-4-5}{5-3} = \boxed{-\frac{9}{2}}.$$

Essendo $AD \parallel BC \quad \Rightarrow \quad m_{AD} = m_{BC} = -\frac{9}{2}$.

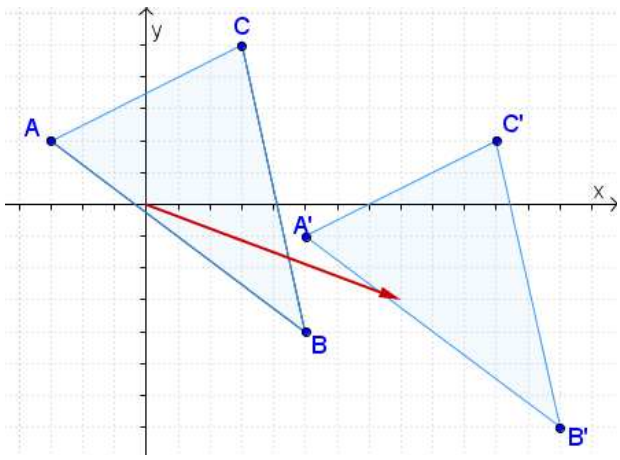
Determiniamo l'equazione della retta AD passante per il vertice A e parallela alla retta BC: $y - y_A = m_{BC}(x - x_A)$;

$$y - 2 = -\frac{9}{2}(x+3) \ ; \qquad y - 2 = -\frac{9}{2}x - \frac{27}{2} \ ; \qquad \boxed{y = -\frac{9}{2}x - \frac{23}{2}}.$$

Determiniamo le coordinate del punto D, punto di intersezione delle rette AD e CD:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{29}{4} \\ y = -\frac{9}{2}x - \frac{23}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{9}{2}x - \frac{23}{2} = -\frac{3}{4}x + \frac{29}{4} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -18x - 46 = -3x + 29 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 15x = -75 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 11 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D(-5\,;11)}$$

Soluzione D



Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} x' = x + 8 \\ y' = y - 3 \end{cases}$

I vertici del triangolo $A'B'C'$ *sono:*

$$A(-3\,;2) \qquad \begin{cases} x' = -3 + 8 = +5 \\ y' = +2 - 3 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A'(5\,;-1)}$$

$$B(5\,;-4) \qquad \begin{cases} x' = +5 + 8 = +13 \\ y' = -4 - 3 = -7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B'(13\,;-7)}$$

$$C(3\,;5) \qquad \begin{cases} x' = +3 + 8 = +11 \\ y' = 5 - 3 = +2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C'(11\,;2)}$$