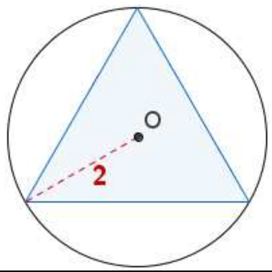
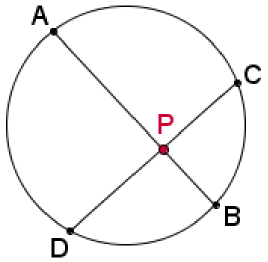
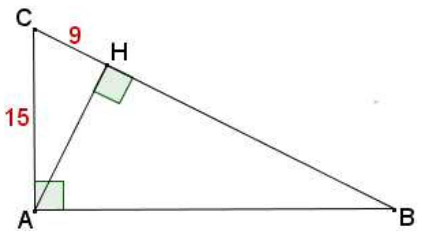
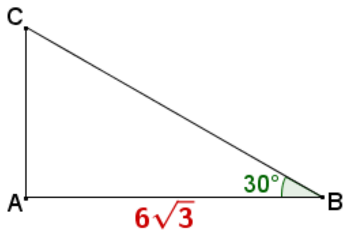
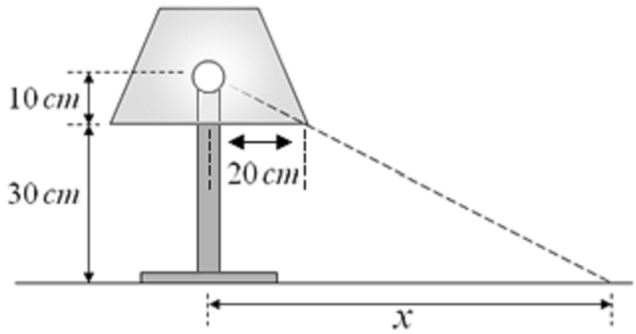
Alunno: ____ Classe: 2A L. Scientifico 25 maggio 2018

1. Determina il perimetro del triangolo inscritto nella circonferenza di raggio 2 .		**2. Determina la misura del segmento PB, sapendo che:** $\overline{\mathbf{CD}} = \mathbf{15}\ \boldsymbol{cm}$, $\overline{\mathbf{PA}} = \mathbf{12}\ \boldsymbol{cm}$, $\overline{\mathbf{PD}} = \mathbf{9}\ \boldsymbol{cm}$	
	$p =$		$\overline{PB} =$

3. Utilizzando i dati forniti dalle figure, calcola le misure dei lati dei triangoli.			
	$\overline{BC} =$ $\overline{AB} =$		$\overline{BC} =$ $\overline{AC} =$

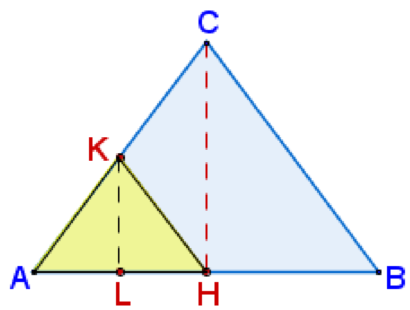
4. In figura è rappresentata una lampada con paralume e relative misure. Quanto misura il raggio x del cerchio di luce proiettato sul piano d'appoggio della lampada ?

[INVALSI 2013]



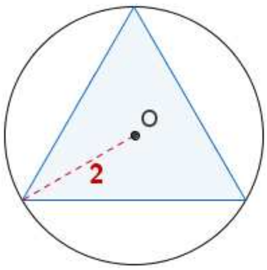
5. Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB in cui $\overline{AB} = 24\ cm$ e $\overline{AC} = \overline{BC} = 20\ cm.$ Detta CH l'altezza relativa ad AB, traccia da H la parallela a BC che incontra AC in K. Determina:

- **a. l'area del triangolo ABC;**
- **b. l'area del triangolo AHK;**
- **c. l'area del trapezio HBCK;**
- **d. la posizione del punto P sul lato AB tale che l'area del rettangolo $PQQ'P'$ risulti massima**
  (Q è la proiezione di P sul lato AC , Q' è la proiezione di Q sul lato BC, P' è la proiezione di P sul lato BC) .



SOLUZIONE

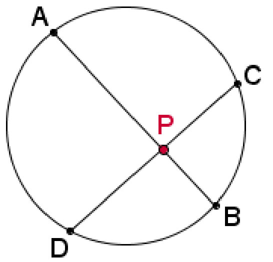
1. Determina il perimetro del triangolo inscritto nella circonferenza di raggio 2 .



$l = \sqrt{3}\, r = 2\sqrt{3}$

$p = 3l = 6\sqrt{3}$

2. Determina la misura del segmento PB, sapendo che: $\overline{\mathbf{CD}} = \mathbf{15}\ \boldsymbol{cm}$, $\overline{\mathbf{PA}} = \mathbf{12}\ \boldsymbol{cm}$, $\overline{\mathbf{PD}} = \mathbf{9}\ \boldsymbol{cm}$



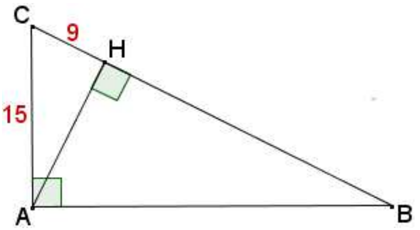
$\overline{PC} = (15 - 9)\ cm = 6\ cm$

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$;

$\overline{PB} = \dfrac{\overline{PC} \cdot \overline{PD}}{\overline{PA}} =$

$= \dfrac{6 \cdot 9}{12}\ cm = 4{,}5\ cm$

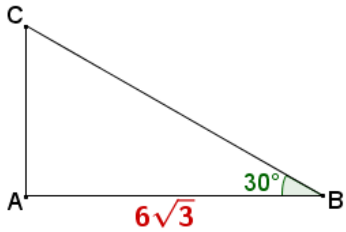
3. Utilizzando i dati forniti dalle figure, calcola le misure dei lati dei triangoli.



$\overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CH}} = \dfrac{225}{9} = 25$

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} =$

$= \sqrt{625 - 225} = 20$



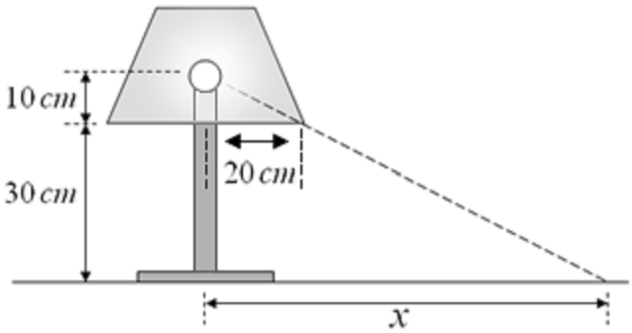
$\overline{BC} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AB} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 6\sqrt{3} = 12$

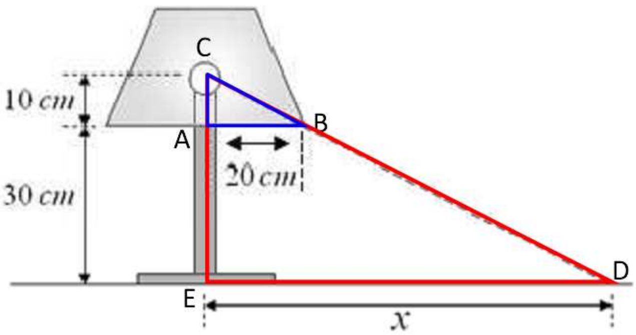
$\overline{AC} = \dfrac{\overline{BC}}{2} = 6$

4. In figura è rappresentata una lampada con paralume e relative misure. Quanto misura il raggio x del cerchio di luce proiettato sul piano d'appoggio della lampada ?

[INVALSI 2013]



Soluzione



ABC~EDC per il 1° Criterio di Similitudine dei Triangoli.

$\hat{C}$ *angolo in comune ai due triangoli.*

$\widehat{BAC} \cong \widehat{DEC}$ *perché entrambi retti;*

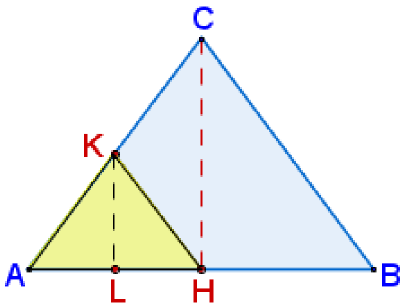
Pertanto, i due triangoli ABC e CDE hanno i lati proporzionali:

$AC : AB = CE : ED$;

$\overline{ED} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CE}}{\overline{AC}} = \dfrac{20 \cdot 40}{10}\ cm = 80\ cm$.

4. **Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB in cui $\overline{AB} = 24\ cm$ e $\overline{AC} = \overline{BC} = 20\ cm$. Detta CH l'altezza relativa ad AB, traccia da H la parallela a BC che incontra AC in K. Determina:**

- **e.** **l'area del triangolo ABC;**
- **f.** **l'area del triangolo AHK;**
- **g.** **l'area del trapezio HBCK;**
- **h.** **la posizione del punto P sul lato AB tale che l'area del rettangolo $PQQ'P'$ risulti massima**
  (Q è la proiezione di P sul lato AC , Q' è la proiezione di Q sul lato BC, P' è la proiezione di P sul lato BC) .



Soluzione a

Essendo ABC un triangolo isoscele sulla base AB si ha: $\overline{AH} = \overline{HB} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} = 12\ cm$.

$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^{\,2} - \overline{HB}^{\,2}} = \sqrt{(20)^2 - (12)^2}\ cm = \sqrt{400 - 144}\ cm = \sqrt{256}\ cm = 16\ cm$.

L'area del triangolo ABC è $S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{24 \cdot 16}{2}\ cm^2 = 192\ cm^2$.

Soluzione b

I triangoli ABC e AHK sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:
L'angolo $\hat{A}$ in comune.
Gli angoli $\widehat{AHK} \cong \hat{B}$ angoli corrispondenti fra le rette parallele HK e BC tagliate dalla trasversale AB.

Essendo il triangolo AHK simile al triangolo ABC, risulta anch'esso un triangolo isoscele.

Quindi: $\overline{AL} = \overline{LH} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{4} \cdot 24\ cm = 6\ cm$.

Il rapporto di similitudine fra i triangoli AHK e ABC è : $k = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{12\ cm}{24\ cm} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \overline{HK} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 20\ cm = 10\ cm \qquad e \qquad \overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot 16\ cm = 8\ cm$.

L'area del triangolo AHK è: $S_{AHK} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{KL}}{2} = \frac{12\ cm \cdot 8\ cm}{2} = 48\ cm^2$.

L'area del triangolo AHK poteva essere calcolata anche sfruttando il rapporto di similitudine $k = \frac{1}{2}$ *:*

$S_{AHK} = k^2 \cdot S_{ABC} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 192\ cm^2 = 48\ cm^2$.

Soluzione c

L'area del trapezio $HBCK$ è: $S_{HBCK} = S_{ABC} - S_{AHK} = 192\ cm^2 - 48\ cm^2 = 144\ cm^2$.

Soluzione d

Poniamo $\overline{PB} = x$ *con* $0 < x < 24 \quad \Rightarrow \quad \overline{AP} = 24 - x$.

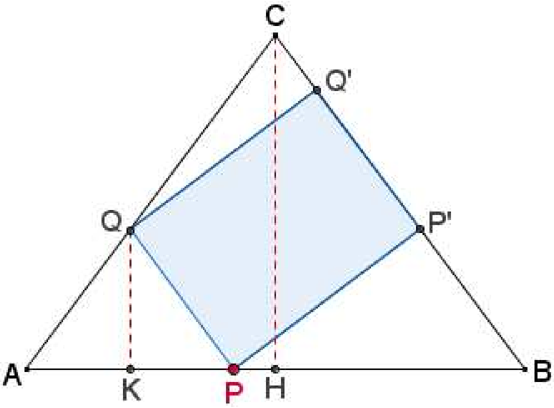
Dalla similitudine dei triangoli rettangoli $PP'B$ e BCH si ricava:

$\overline{PP'} : \overline{CH} = \overline{PB} : \overline{BC}$; $\quad \overline{PP'} : 16 = x : 20$; $\quad \overline{PP'} = \frac{4}{5}x$.

Dalla similitudine dei triangoli isosceli APQ e ABC si ricava:

$\overline{PQ} : \overline{BC} = \overline{AP} : \overline{AB}$; $\quad \overline{PQ} : 20 = (24 - x) : 24$;

$$\overline{PQ} = \frac{20 \cdot (24 - x)}{24} = \frac{480 - 20x}{24} = \frac{480}{24} - \frac{20x}{24} = 20 - \frac{5}{6}x.$$



L'area del rettangolo $PQQ'P'$ risulta :

$S(x) = \overline{PP'} \cdot \overline{PQ} = \frac{4}{5}x \cdot \left(20 - \frac{5}{6}x\right)$; $\qquad S(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 16x$.

Tale equazione rappresenta l'equazione di una parabola con concavità negativa.
Il valore massimo si ottiene per $x = x_{Vertice} = -\frac{b}{2\,a} = -\frac{16}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{16}{\frac{4}{3}} = 16 \cdot \frac{3}{4} = 12$.

Pertanto, la posizione del punto P affinché l'area del rettangolo $PQQ'P'$ risulti massima è nel punto medio del segmento AB.