19.12.2015
prof. Mimmo Corrado

Prova di Matematica : Sistemi lineari

Alunno: ____ Classe: 2A L. Scientifico

1. Determina il grado dei seguenti sistemi :

$\begin{cases}(x+1)^2 = x\cdot(x+y)\\6x+5y=12\end{cases}$	$\begin{cases}xy-3y=2\\x-4xy=0\end{cases}$	$\begin{cases}6x^2+xy^3=5\\x+y^2-5=0\end{cases}$	$\begin{cases}x-y=1\\2xy+3y=7\end{cases}$
Sistema di …… grado	Sistema di …… grado	Sistema di …… grado	Sistema di …… grado

2. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema

$\begin{cases}xy+y=4\\6y-7x=5\end{cases}$	$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$	$\begin{cases}x+3y=7\\2x+6y=9\end{cases}$	$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}\\2x-3y=1\end{cases}$	$\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-y^2=3\\2x+6y=2\end{cases}$	$\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$
SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO

3. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con due diversi metodi:

$\begin{cases}2x-3y=7\\3x+4y-2=0\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}6x-9y+3=0\\6y-4x=2\end{cases}$

4. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y : $\begin{cases}k(x+y)+2y=4\\\frac{kx-y}{2}+1=0\end{cases}$

5. Luca si prepara all'ultimo compito in classe di matematica dell'anno. Luca lo affronta con tranquillità, sapendo che se prenderà 10 avrà la media del 9, mentre prendendo 5 la media diverrà 8. Quanti compiti ha già fatto Luca?

6. Un serbatoio è riempito da tre diversi condotti in 5 minuti; se fossero aperti solo i primi due condotti il serbatoio si riempirebbe in 10 minuti; se fossero aperti solo il secondo e il terzo il serbatoio si riempirebbe in 6 minuti. In quanto tempo ogni condotto riempirebbe da solo lo stesso serbatoio?

Soluzione

1. Determina il grado dei seguenti sistemi :

$\begin{cases}(x+1)^2 = x\cdot(x+y)\\ 6x+5y=12\end{cases}$	$\begin{cases}xy-3y=2\\ x-4xy=0\end{cases}$	$\begin{cases}6x^2+xy^3=5\\ x+y^2-5=0\end{cases}$	$\begin{cases}x-y=1\\ 2xy+3y=7\end{cases}$
Sistema di **2°** grado	Sistema di **4°** grado	Sistema di **8°** grado	Sistema di **2°** grado

2. Verifica se la coppia a lato è soluzione del sistema

$\begin{cases}xy+y=4\\ 6y-7x=5\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$	$\begin{cases}x+3y=7\\ 2x+6y=9\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}\\ 2x-3y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-y^2=3\\ 2x+6y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}$
SI	**NO**	**SI**	**NO**

3. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con due diversi metodi:

$$\begin{cases}\mathbf{6x-9y+3=0}\\ \mathbf{6y-4x=2}\end{cases}\qquad Il\ sistema\ è\ indeterminato\ .$$

$$Infatti\ riducendo\ il\ sistema\ a\ forma\ normale\quad \begin{cases}6x-9y=-3\\ -4x+6y=2\end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a^I}=\frac{+6}{-4}=-\frac{3}{2}\right)\ =\ \left(\frac{b}{b^I}=\frac{-9}{+6}=-\frac{3}{2}\right)\ =\ \left(\frac{c}{c^I}=-\frac{3}{2}\right)$$

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases}\mathbf{2x-3y=7}\\ \mathbf{3x+4y-2=0}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}2x-3y=7\\ 3x+4y=2\end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a^I}=\frac{2}{3}\right)\ \neq\ \left(\frac{b}{b^I}=-\frac{3}{4}\right)\qquad Sistema\ determinato$$

$$\begin{cases}2x-3y=7\\ 3x+4y=2\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{3}{2}y+\frac{7}{2}\\ \end{cases}\quad\begin{cases}\cdots\\ 3\cdot\left(\frac{3}{2}y+\frac{7}{2}\right)+4y=2\end{cases}\quad\begin{cases}\cdots\\ \frac{9}{2}y+\frac{21}{2}+4y=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cdots\\ 9y+21+8y=4\end{cases}\quad\begin{cases}\cdots\\ 17y=-17\end{cases}\quad\begin{cases}\cdots\\ y=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{3}{2}\cdot(-1)+\frac{7}{2}=\frac{4}{2}=2\\ \cdots\end{cases}\quad\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$$

Metodo del confronto

$$\begin{cases}\mathbf{2x-3y=7}\\ \mathbf{3x+4y=2}\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{3}{2}y+\frac{7}{2}\\ x=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}y\end{cases}\quad\begin{cases}\cdots\\ \frac{3}{2}y+\frac{7}{2}=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}y\end{cases}\quad\begin{cases}\cdots\\ 9y+21=4-8y\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cdots\\ 17y=-17\end{cases}\quad\begin{cases}\cdots\\ y=-1\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{3}{2}\cdot(-1)+\frac{7}{2}=\frac{4}{2}=2\\ \cdots\end{cases}\quad\begin{cases}x=+2\\ y=-1\end{cases}$$

Metodo di riduzione

$$\begin{matrix}3\cdot\\ 2\cdot\end{matrix}\begin{cases}\mathbf{2x-3y=7}\\ \mathbf{3x+4y=2}\end{cases}\qquad\begin{cases}6x-9y=21\\ 6x+8y=\ 4\end{cases}\begin{matrix}-\\ =\end{matrix}$$

$$-17y=17;\qquad y=-1$$

$$\begin{matrix}4\cdot\\ 3\cdot\end{matrix}\begin{cases}2x-3y=7\\ 3x+4y=2\end{cases}\qquad\begin{cases}8x-12y=28\\ 9x+12y=6\end{cases}\begin{matrix}+\\ =\end{matrix}$$

$$17x=\ 34;\qquad x=2\qquad\begin{cases}x=+2\\ y=-1\end{cases}$$

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 7} \\ \mathbf{3x + 4y = 2} \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-3) = 8 + 9 = 17$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 28 + 6 = 34$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 7 = 4 - 21 = -17$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{34}{17} = +2 \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{-17}{17} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = +2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Metodo Grafico

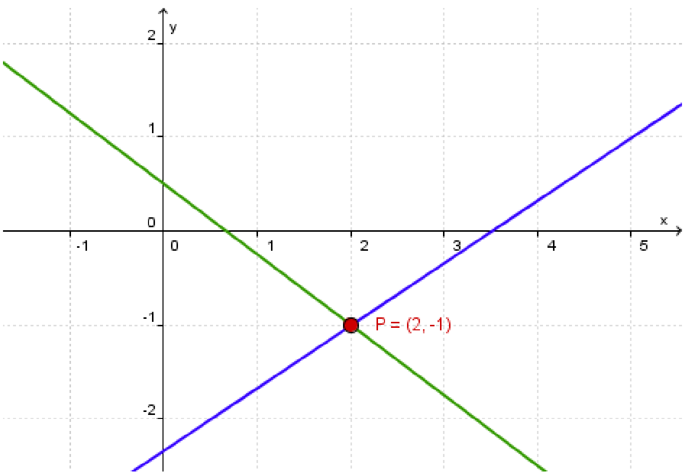
$$\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 7} \\ \mathbf{3x + 4y = 2} \end{cases}$$

$2x - 3y = 7$

x	y
0	$-\dfrac{7}{3}$
$\dfrac{7}{2}$	0

$3x + 4y = 2$

x	y
0	$\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{2}{3}$	0



4. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y :

$$\begin{cases} \mathbf{k(x+y) + 2y = 4} \\ \dfrac{\mathbf{kx - y}}{\mathbf{2}} + \mathbf{1 = 0} \end{cases} \qquad \begin{cases} kx + ky + 2y = 4 \\ k\,x - y + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k\,x + (k+2)\,y = 4 \\ k\,x - y = -2 \end{cases}$$

Il determinante del sistema è $D = \begin{vmatrix} k & k+2 \\ k & -1 \end{vmatrix} = -k - k^2 - 2k = -k^2 - k = -k \cdot (k+3)$.

Il determinante $D_x = \begin{vmatrix} 4 & k+2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 2k + 4 = 2k$

Il determinante $D_y = \begin{vmatrix} k & 4 \\ k & -2 \end{vmatrix} = -2k - 4k = -6k$

Discussione:

$Se\ \ D = 0 \quad cioè\ se \quad -k \cdot (k+3) = 0 \quad \begin{cases} k = 0 & \Rightarrow & (D_x = 0 \ \wedge \ D_y = 0) & S.indeterminato \\ k = -3 & \Rightarrow & (D_x = -6 \ \wedge \ D_y = 18) & S.impossibile \end{cases}$

$Se\ D \neq 0 \quad cioè\ \ k \neq 0 \ \wedge \ k \neq -3$ *il sistema è determinato, e la soluzione è :*

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2k}{-k \cdot (k+3)} = -\dfrac{2}{k+3} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-6k}{-k \cdot (k+3)} = \dfrac{6}{k+3} \end{cases}$$

Riassumendo si ha:

Parametro	***Tipo***	***Soluzione***
$k = 0$	*Sistema indeterminato*	∞
$k = -3$	*Sistema impossibile*	$\emptyset$
$k \neq 0 \ \wedge \ k \neq -3$	*Sistema determinato*	$\left(x = -\dfrac{2}{k+3} \ ; \ y = \dfrac{6}{k+3}\right)$

6. Luca si prepara all'ultimo compito in classe di matematica dell'anno. Luca lo affronta con tranquillità, sapendo che se prenderà 10 avrà la media del 9, mentre prendendo 5 la media diverrà 8. Quanti compiti ha già fatto Luca?

<u>*Soluzione*</u>

Poniamo: $N°compiti\ già\ fatti = x$ $\qquad$ $Somma\ dei\ voti\ nei\ compiti\ già\ fatti = y$ $\qquad$ con $\quad x, y \in N.$

Si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{y+10}{x+1} = 9 \\ \dfrac{y+5}{x+1} = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y+10 = 9(x+1) \\ y+5 = 8(x+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y+10 = 9x+9 \\ y+5 = 8x+8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 9x-1 \\ y = 8x+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 9x-1 = 8x+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x = 4 \end{cases}$$

Pertanto Luca ha già fatto 4 compiti.

7. Un serbatoio è riempito da tre diversi condotti in 5 minuti; se fossero aperti solo i primi due condotti il serbatoio si riempirebbe in 10 minuti; se fossero aperti solo il secondo e il terzo il serbatoio si riempirebbe in 6 minuti. In quanto tempo ogni condotto riempirebbe da solo lo stesso serbatoio?

<u>*Soluzione*</u>

I tre condotti in un minuto riempiono $\frac{1}{5}$ del serbatoio;
I primi due condotti in un minuto riempiono $\frac{1}{10}$ del serbatoio;
Il secondo e il terzo condotto in un minuto riempiono $\frac{1}{6}$ del serbatoio;

Ponendo:
la frazione del serbatoio riempito in 1 minuto dal primo condotto $= x$;
la frazione del serbatoio riempito in 1 minuto dal secondo condotto $= y$;
la frazione del serbatoio riempito in 1 minuto dal terzo condotto $= z$; $\qquad$ con $\quad x, y, z \in R^+$
si ottiene:

$$\begin{cases} x+y+z = \dfrac{1}{5} \\ x+y = \dfrac{1}{10} \\ y+z = \dfrac{1}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ z = \dfrac{1}{6} - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+\dfrac{1}{6} - y = \dfrac{1}{5} \\ x+y = \dfrac{1}{10} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{1}{10} - x \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{6-5}{30} = \dfrac{1}{30} \\ - \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ y = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{30} = \dfrac{3-1}{30} = \dfrac{1}{15} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ z = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{5-2}{30} = \dfrac{1}{10} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{30} \\ y = \dfrac{1}{15} \\ z = \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

Pertanto:
Il primo condotto riempie in 1 minuto $\frac{1}{30}$ del serbatoio. L'intero serbatoio è riempito in 30 minuti.
Il secondo condotto riempie in 1 minuto $\frac{1}{15}$ del serbatoio. L'intero serbatoio è riempito in 15 minuti.
Il terzo condotto riempie in 1 minuto $\frac{1}{10}$ del serbatoio. L'intero serbatoio è riempito in 10 minuti.