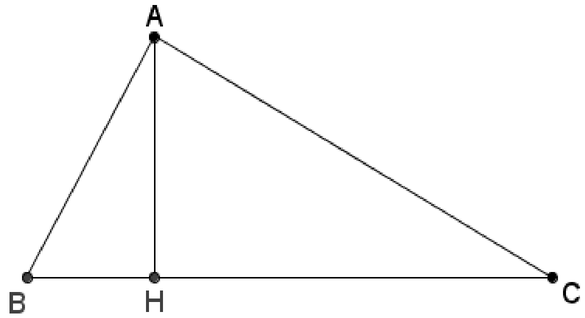
PROBLEMI SUI TEOREMI DI EUCLIDE

risolvibili per via algebrica

Problema Petrini 639.135



D
A
T
I

$$\begin{cases} \overline{AH} = \sqrt{15} \\ \overline{BC} = 8 \end{cases}$$

$\overline{AB} = ?$
$\overline{AC} = ?$

<u>*Soluzione*</u>

Poniamo $\overline{BH} = x$ *(con dominio di variabilità:* $0 < x < 8$*).*

Ricaviamo : $\overline{HC} = 8 - x$

Applicando il 2° T di Euclide al triangolo rettangolo ABC, $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$ *ricaviamo:*

$\left(\sqrt{15}\right)^2 = x \cdot (8 - x)\,;\qquad 15 = 8x - x^2\,;\qquad x^2 - 8x + 15 = 0\,;$

$\dfrac{\Delta}{4} = 4^2 - 1 \cdot 15 = 1\,.\qquad x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{1} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ \\ x_2 = 5 \end{matrix}$

Pertanto $\overline{BH} = 3$ *e* $\overline{HC} = 5\,.$

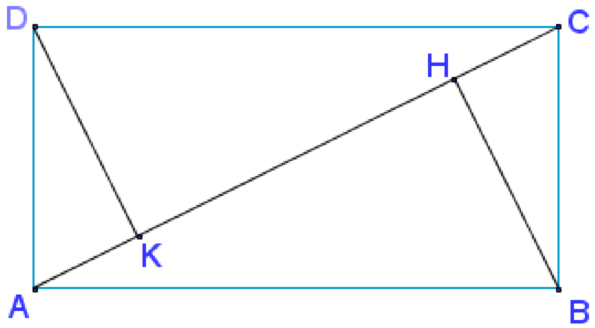
Applicando il 1° T di Euclide al triangolo rettangolo ABC, $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$ *ricaviamo:*

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{3 \cdot 8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\ .$

Applicando il 1° T di Euclide al triangolo rettangolo ABC, $\overline{AC}^2 = \overline{HC} \cdot \overline{BC}$ *ricaviamo:*

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{HC} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{5 \cdot 8} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ .$

In un rettangolo ABCD, siano H e K, rispettivamente, le proiezioni di B e D sulla diagonale AC. Sapendo che $\overline{HK} = a$ e $\overline{AB} = 2\overline{BC}$, determina l'area del rettangolo.



<u>Soluzione</u>

Per risolvere il problema occorre impostare una relazione che utilizza l'unico dato numerico (o parametrico) assegnato.

In questo caso la relazione è $\overline{HK} = a$.

Cioè : $\overline{AC} - 2\overline{HC} = a$ $\quad (\overline{AK} = \overline{HC})$

Pertanto, poniamo $\overline{BC} = x$ *(con dominio di variabilità:* $x > 0$*).*

Ricaviamo : $\overline{AB} = 2x$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC ricaviamo: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} = \sqrt{5}x$.

Applicando il 1° T di Euclide al triangolo rettangolo ABC, $\overline{BC}^2 = \overline{HC} \cdot \overline{AC}$ *ricaviamo:*

$$\overline{HC} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}} = \frac{x^2}{\sqrt{5}x} = \frac{x}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}x \, .$$

Sostituendo i dati trovati nella relazione $\overline{AC} - 2\overline{HC} = a$ *si ottiene :*

$$\sqrt{5}x - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}x = a \, ; \qquad 5\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}x = 5a \, ; \qquad 3\sqrt{5}x = 5a \, ; \qquad 3\sqrt{5}x = 5a \, ; \qquad x = \frac{5a}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}a \, .$$

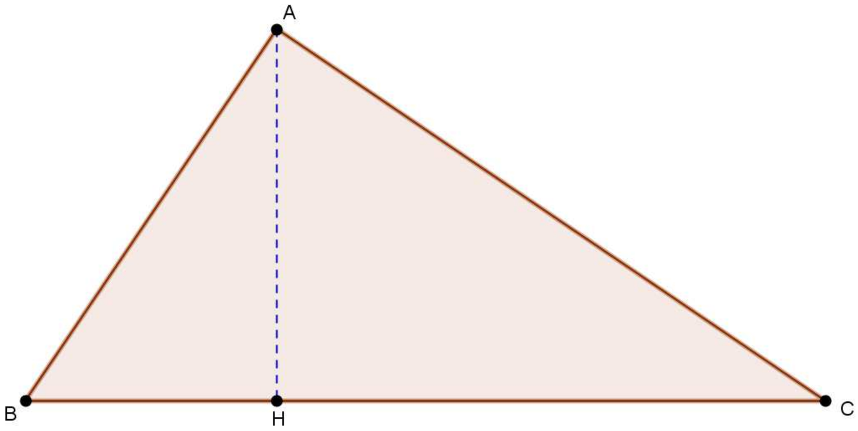
Pertanto $\overline{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3}a$ *e* $\overline{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{3}a$

Concludendo, l'area del rettangolo è :

$$S = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3}a \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3}a = \frac{10}{9}a^2 \, .$$

In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che il perimetro del triangolo è 24 cm, determina l'area del triangolo.

<u>Soluzione</u>



Ponendo $\overline{HC} = x$, *con dominio di variabilità:* $0 < x < 12$,

si ha: $\overline{AC} = \frac{5}{4}x$

Applicando il 1° *T di Euclide si ha*: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{HC}} = \frac{\frac{25}{16}x^2}{x} = \frac{25}{16}x$

Inoltre: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{\frac{625}{256}x^2 - \frac{25}{16}x^2} = \sqrt{\frac{625-400}{256}x^2} = \sqrt{\frac{225}{256}x^2} = \frac{15}{16}x$.

Utilizzando il perimetro $2p = 24\ cm$ *si ottiene:*

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 24$; $\qquad \frac{15}{16}x + \frac{25}{16}x + \frac{5}{4}x = 24$; $\qquad 15x + 25x + 20x = 384$

$60x = 384$; $\qquad x = \frac{384}{60} = \frac{32}{5}$

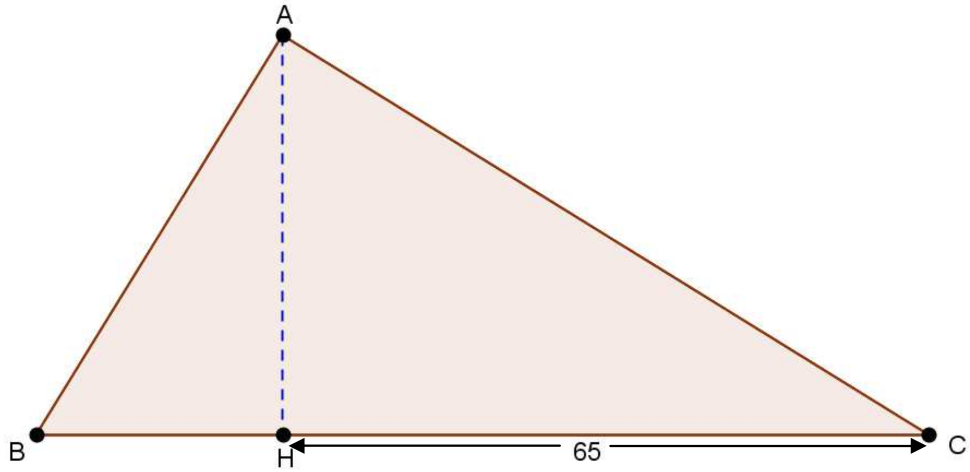
Quindi: $\overline{AC} = \frac{5}{4} \cdot \frac{32}{5} = 8\ cm \qquad \overline{AB} = \frac{15}{16} \cdot \frac{32}{5} = 6\ cm$

Pertanto l'area del triangolo è: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\right) cm^2 = 24\ cm^2$.

In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è i $\frac{4}{9}$ del cateto stesso, mentre la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa ha lunghezza 65 cm. Determina il perimetro del triangolo.

$$\begin{matrix} D \\ A \\ T \\ I \end{matrix} \begin{cases} \overline{HC} = 65\ cm \\ \overline{BH} = \frac{4}{9}\overline{AB} \end{cases} \qquad\qquad 2p_{ABC} = ?$$

Soluzione



Ponendo $\overline{AB} = x$, *con dominio di variabilità:* $x > 0$,

si ha: $\overline{BH} = \frac{4}{9}x$ *e* $\overline{BC} = \frac{4}{9}x + 65$

Applicando il I Teorema di Euclide al triangolo ABC si ha:

$\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$; $\quad x^2 = \frac{4}{9}x \cdot \left(\frac{4}{9}x + 65\right)$; $\quad x^2 = \frac{16}{81}x^2 + \frac{260}{9}x$;

$81x^2 = 16x^2 + 2340x$; $\quad 65x^2 - 2340x = 0$; $\quad x^2 - 36x = 0$; $\quad x \cdot (x - 36) = 0$; $\quad \begin{matrix} x = 0 & NO \\ x = 36 & SI \end{matrix}$

Pertanto: $\overline{AB} = 36\ cm$ $\quad \overline{BH} = \frac{4}{9} \cdot 36\ cm = 16\ cm$ *e* $\overline{BC} = (16 + 65)\ cm = 81\ cm$.

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo ABC si ha:

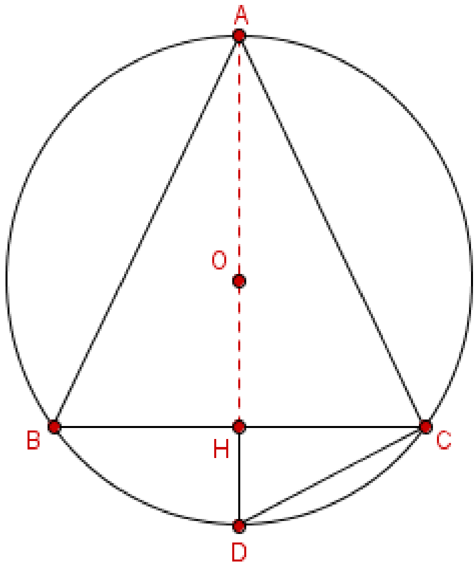
$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{81^2 - 36^2} = \sqrt{6561 - 1296} = \sqrt{5265} = 9\sqrt{65}\ cm$

Pertanto è: $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \left(36 + 81 + 9\sqrt{65}\right)\ cm = \left(117 + 9\sqrt{65}\right)\ cm$.

Un triangolo isoscele, inscritto in una circonferenza di raggio $60\ m$, ha l'altezza uguale alla base. Determina l'area del triangolo.

DATI $\begin{cases} r = 60\ m \\ \overline{AH} = \overline{BC} \end{cases}$

$S_{ABC} = ?$



Soluzione

Poniamo $\overline{HC} = x$ *con dominio di variabilità:* $0 < x \leq 60$,

si ha: $\overline{AH} = 2x$ *e* $\overline{HD} = 120 - 2x$

Applicando il II teorema di Euclide al triangolo rettangolo ADC si ottiene:

$\overline{HC}^{\,2} = \overline{AH} \cdot \overline{HD}$;

$x^2 = 2x \cdot (120 - 2x)$;

$x^2 = 240x - 4x^2$;

$5x^2 - 240x = 0$; $x(5x - 240) = 0$; $\begin{array}{l} x_1 = 0 \quad non\ Accettabile \\ x_2 = 48 \quad Accettabile \end{array}$

Pertanto $\overline{HC} = x = 48\ m$ *e* $\overline{AH} = 96\ m$.

L'area del triangolo ABC è:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2} \cdot 96 \cdot 96 = 4608\ m^2$.