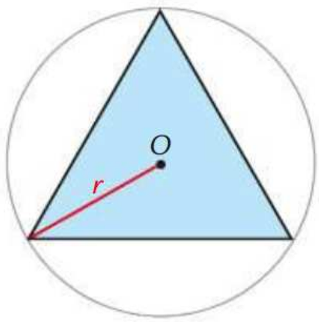
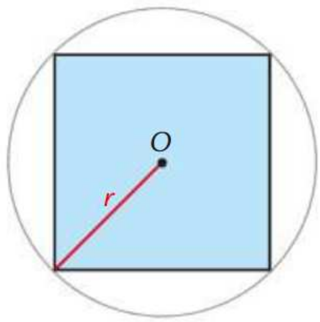
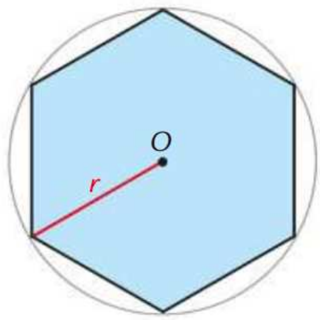
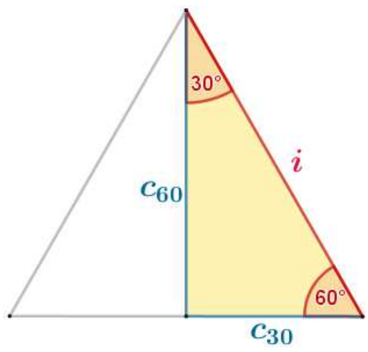
PROBLEMI SUL TEOREMA DI PITAGORA

(risolvibili per via Aritmetica)

ESERCIZIO 1 **PITAGORA**

		
$Perimetro =$	$Perimetro =$	$Perimetro =$
$Area =$	$Area =$	$Area =$

Occorre ricordare che:

	$c_{30} = \frac{1}{2}\, i$	$c_{60} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$	$c_{30} = \frac{c_{60}}{\sqrt{3}}$
	$i = 2\, c_{30}$	$i = \frac{2}{\sqrt{3}}\, c_{60}$	$c_{60} = \sqrt{3} \cdot c_{30}$

In un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°:
il cateto opposto all'angolo di 30° è congruente alla metà dell'ipotenusa;
il cateto opposto all'angolo di 60° è congruente al prodotto fra la metà dell'ipotenusa e la $\sqrt{3}$;
il cateto opposto all'angolo di 60° è congruente al prodotto fra il cateto opposto all'angolo di 30° e la $\sqrt{3}$.

$$c_{60} = \sqrt{i^2 - \left(\frac{1}{2}\, i\right)^2} = \sqrt{i^2 - \frac{1}{4}\, i^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\, i^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

$$\frac{c_{30}}{c_{60}} = \frac{\frac{1}{2}\, i}{\frac{\sqrt{3}}{2}\, i}\,; \qquad \frac{c_{30}}{c_{60}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\,;$$

$$\frac{c_{30}}{c_{60}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,; \qquad c_{30} = \frac{c_{60}}{\sqrt{3}}\,.$$

Soluzione 1

$$c_{60} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, r\,.$$

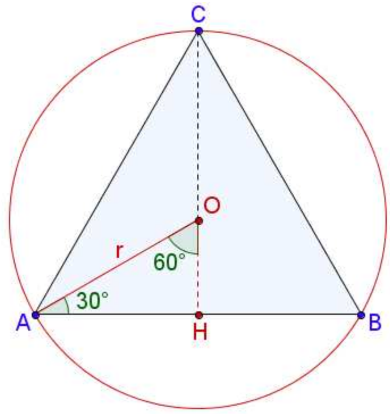
$$\overline{AB} = 2\, \overline{AH} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, r = \sqrt{3}\, r\,.$$

$$c_{30} = \frac{1}{2}\, i \qquad \Rightarrow \qquad \overline{OH} = \frac{1}{2} r\,.$$

$$\overline{CH} = \overline{CO} + \overline{OH} = r + \frac{1}{2} r = \frac{3}{2} r\,.$$

$$Perimetro = 3 \cdot \overline{AB} = 3\sqrt{3}\, r\,.$$

$$Area = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\, r \cdot \frac{3}{2} r = \frac{3}{4}\sqrt{3}\, r^2\,.$$

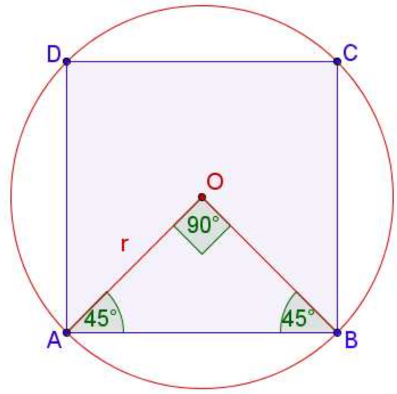


Soluzione 2

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2\, r^2} = \sqrt{2}\, r\,.$$

$$Perimetro = 4 \cdot \overline{AB} = 4\sqrt{2}\, r\,.$$

$$Area = \overline{AB}^2 = \left(\sqrt{2}\, r\right)^2 = 2r^2\,.$$



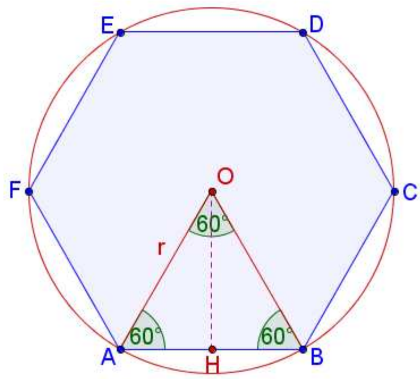
Soluzione 3

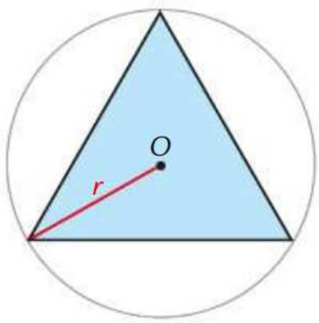
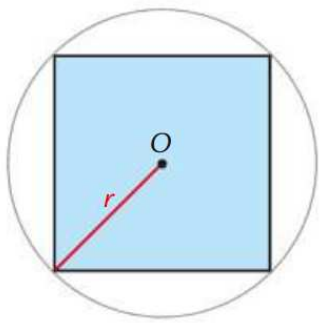
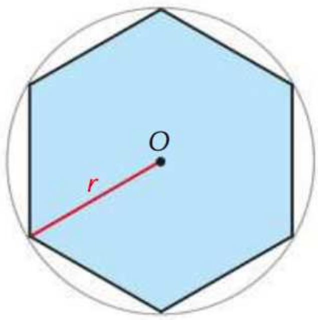
$$\overline{AB} = r$$

$$c_{60} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \qquad \Rightarrow \qquad \overline{OH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, r\,.$$

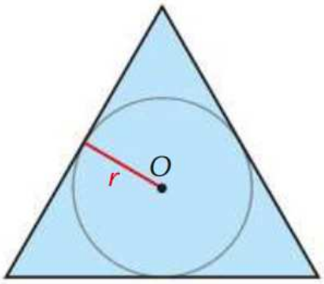
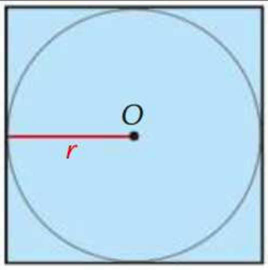
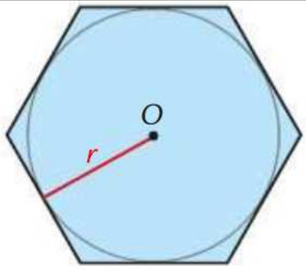
$$Perimetro = 6 \cdot \overline{AB} = 6\, r\,.$$

$$Area = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OH} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, r = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, r^2\,.$$

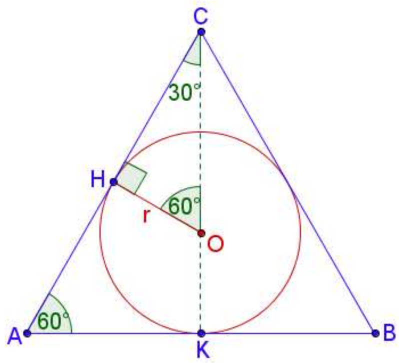


		
$Perimetro = 3\sqrt{3}\, r$	$Perimetro = 4\sqrt{2}\, r$	$Perimetro = 6\, r$
$Area = \frac{3}{4}\sqrt{3}\, r^2$	$Area = 2r^2$	$Area = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, r^2$

ESERCIZIO 2 PITAGORA

		
$Perimetro =$	$Perimetro =$	$Perimetro =$
$Area =$	$Area =$	$Area =$

<u>*Soluzione 1*</u>



Nel triangolo rettangolo COH si ha:

$i = 2\, c_{30} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{CO} = 2\, r \qquad \Rightarrow \qquad \overline{CK} = 3\, r\,.$

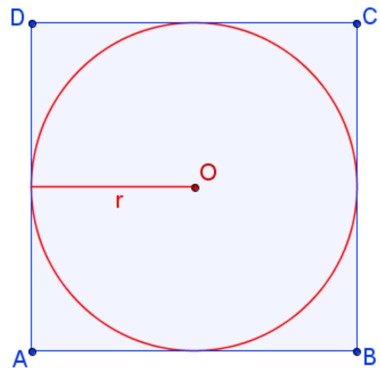
Nel triangolo rettangolo ACK si ha:

$i = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, c_{60} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AC} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{CK} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3\, r = \dfrac{6}{\sqrt{3}}\, r$

$Perimetro = 3 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{3}}\, r = \dfrac{18}{\sqrt{3}}\, r \;\; = \dfrac{18}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\, r = 6\sqrt{3}\, r\,.$

$Area = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CK} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{3}}\, r \cdot 3\, r = \dfrac{9}{\sqrt{3}}\, r^2 = \dfrac{9}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\, r^2 = \dfrac{9\sqrt{3}}{3}\, r^2 = 3\sqrt{3}\, r^2\,.$

<u>*Soluzione 2*</u>



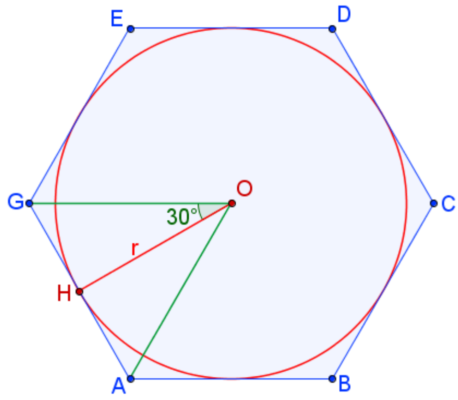
Osservando la figura si ha:

$\overline{AB} = 2\, r\,.$

$Perimetro = 4 \cdot \overline{AB} = 4 \cdot 2r = 8\, r\,.$

$Area = \overline{AB}^2 = (2r)^2 = 4\, r^2\,.$

<u>Soluzione 3</u>



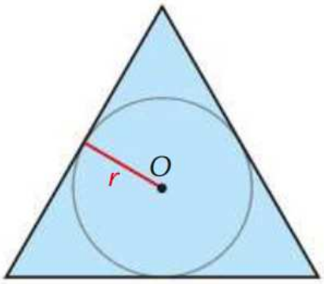
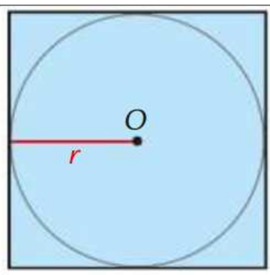
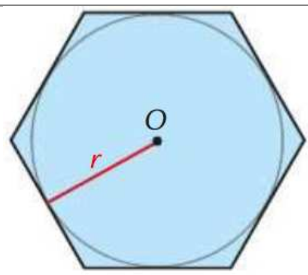
Nel triangolo rettangolo GOH si ha:

$i = 2\, c_{30} \quad \Rightarrow \quad \overline{CO} = 2\, r \quad \Rightarrow \quad \overline{CK} = 3\, r\,.$

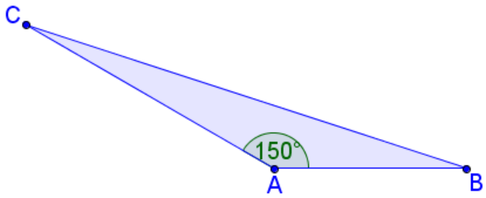
$c_{30} = \dfrac{c_{60}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \overline{GH} = \dfrac{r}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AG} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, r\,.$

$$Perimetro = 6 \cdot \overline{AG} = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\, r = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\, r = 4\sqrt{3}\, r\,.$$

$$Area = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AG} \cdot \overline{OH} = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\, r \cdot r = \frac{6}{\sqrt{3}}\, r^2 = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\, r^2 = 2\sqrt{3}\, r^2\,.$$

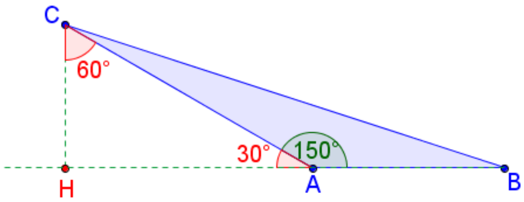
		
$Perimetro = 6\sqrt{3}\, r$	$Perimetro = 8\, r$	$Perimetro = 4\sqrt{3}\, r$
$Area = 3\sqrt{3}\, r^2$	$Area = 4\, r^2$	$Area = 2\sqrt{3}\, r^2$

ESERCIZIO 3 **PITAGORA**



In un triangolo ABC raffigurato a lato, $\overline{AB} = 2a$, $\overline{AC} = 2\sqrt{3}\, a$, $B\hat{A}C = 150°$. Determina la misura di BC.

<u>*Soluzione*</u>



$C\hat{A}H = 180 - B\hat{A}C = 180° - 150° = 30°$.

Nel triangolo rettangolo ACH si ha:

$c_{30} = \frac{1}{2}\, i \qquad \Rightarrow \qquad \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}\, a = \sqrt{3}\, a$.

$c_{60} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3}\, a = 3a$.

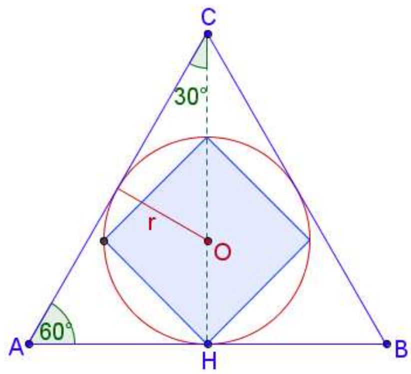
Pertanto: $\overline{HB} = \overline{AH} + \overline{AB} = 3a + 2a = 5a$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ha

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\, a\right)^2 + (5\, a)^2} = \sqrt{3a^2 + 25a^2} = \sqrt{28a^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2} = 2\sqrt{7}\, a \ .$$

ESERCIZIO 4 **PITAGORA**

Dato un cerchio di raggio r, calcola il rapporto tra l'area del triangolo equilatero circoscritto al cerchio e l'area del quadrato inscritto nel cerchio.



<u>*Soluzione*</u>

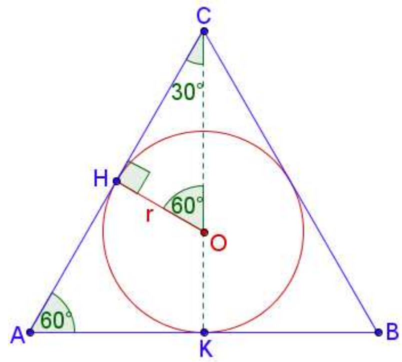
Nel triangolo rettangolo COH si ha:

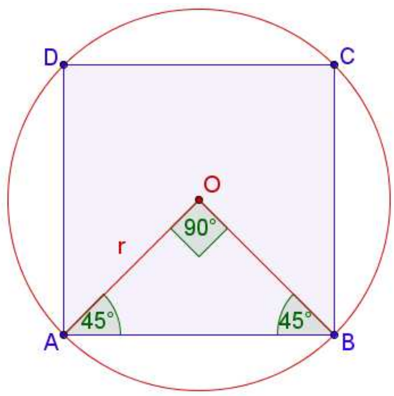
$i = 2\, c_{30} \quad \Rightarrow \quad \overline{CO} = 2\, \overline{OH} = 2\, r \quad \Rightarrow \quad \overline{CK} = 3\, r\, .$

Nel triangolo rettangolo ACK si ha:

$$c_{30} = \frac{c_{60}}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AK} = \frac{\overline{CK}}{\sqrt{3}} = \frac{3\, r}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 2\, \overline{AK} = \frac{6}{\sqrt{3}}\, r\, .$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}}\, r \cdot 3\, r = \frac{9}{\sqrt{3}}\, r^2 = \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\, r^2 = 3\sqrt{3}\, r^2\, .$$





Un quadrato inscritto in un cerchio ha il lato:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2\, r^2} = \sqrt{2}\, r\, .$$

Pertanto l'area è:

$$S_{Quadrato} = \overline{AB}^2 = \left(\sqrt{2}\, r\right)^2 = 2r^2\, .$$

In definitiva il rapporto tra l'area del triangolo equilatero circoscritto al cerchio e l'area del quadrato inscritto nel cerchio è:

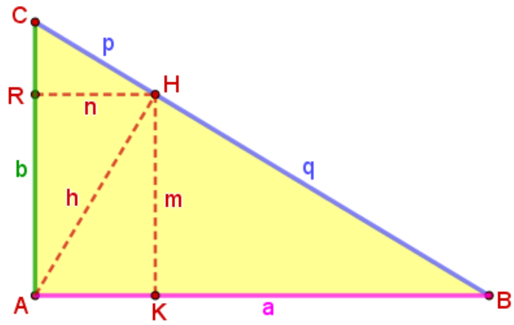
$$\frac{S_{Triangolo\ eq.}}{S_{Quadrato}} = \frac{3\sqrt{3}\, r^2}{2r^2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, .$$

PROBLEMI SUL TEOREMA DI EUCLIDE

(risolvibili per via Aritmetica)

ESERCIZIO 5 EUCLIDE

Nella figura a lato sono indicate le misure di alcuni segmenti. L'angolo $B\widehat{A}C$ è retto; H è la proiezione di A su BC; K e R sono le proiezioni di H sui cateti AB e AC. Indica le formule per calcolare la misura di: h, e di $a-n$.



Soluzione

Per il 1° teorema di Euclide applicato al triangolo ACH si ha: $h^2 = b \cdot m$; $h = \sqrt{b \cdot m}$.

Per il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo ABC si ha: $h^2 = p \cdot q$; $h = \sqrt{p \cdot q}$.

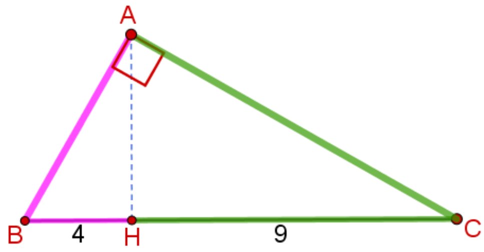
Per il 1° teorema di Euclide applicato al triangolo ABH si ha: $h^2 = a \cdot n$; $h = \sqrt{a \cdot n}$.

Per il 1° teorema di Euclide applicato al triangolo ABH si ha: $q^2 = a \cdot (a-n)$; $(a-n) = \frac{q^2}{a}$.

Per il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo ABH si ha: $m^2 = n \cdot (a-n)$; $(a-n) = \frac{m^2}{n}$.

ESERCIZIO 6 EUCLIDE *(Senza utilizzare il Teorema di Pitagora)*

Nel triangolo rettangolo ABC le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa misurano $\overline{BH} = 4$ e $\overline{CH} = 9$. Determina le misure di AB, AC e AH.



<u>*Metodo 1*</u> *(Sostituendo i dati nella formula e risolvendo l'equazione ottenuta)*

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AB}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$; $\overline{AB}^{\,2} = 4 \cdot 13$; $\overline{AB}^{\,2} = 52$;

$\overline{AB} = \sqrt{52} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AC}^{\,2} = \overline{CH} \cdot \overline{BC}$; $\overline{AC}^{\,2} = 9 \cdot 13$; $\overline{AC}^{\,2} = 117$; $\overline{AC} = \sqrt{117} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{13} = 3\sqrt{13}$.

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AH}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$; $\overline{AH}^{\,2} = 4 \cdot 9$; $\overline{AH}^{\,2} = 36$; $\overline{AH} = \sqrt{36} = 6$.

<u>*Metodo 2*</u> *(Ricavando la formula inversa e applicandola)*

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AB}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$;

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{4 \cdot 13} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

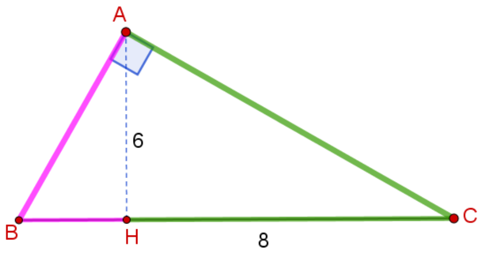
$\overline{AC}^{\,2} = \overline{CH} \cdot \overline{BC}$; $\overline{AC} = \sqrt{\overline{CH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{9 \cdot 13} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{13} = 3\sqrt{13}$.

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AH}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$; $\overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{CH}} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$.

ESERCIZIO 7 EUCLIDE *(Senza utilizzare il Teorema di Pitagora)*

Nel triangolo rettangolo ABC determina le misure di AB e AC.



Metodo 1 *(Sostituendo i dati nella formula e risolvendo l'equazione ottenuta)*

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AH}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$; $\quad 6^2 = \overline{BH} \cdot 8$; $\quad \overline{BH} = \frac{36}{8} = 4{,}5$.

$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = 4{,}5 + 8 = 12{,}5$.

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AB}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$; $\quad \overline{AB}^{\,2} = 4{,}5 \cdot 12{,}5$; $\quad \overline{AB}^{\,2} = 56{,}25$; $\quad \overline{AB} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$.

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AC}^{\,2} = \overline{CH} \cdot \overline{BC}$; $\quad \overline{AC}^{\,2} = 8 \cdot 12{,}5$; $\quad \overline{AC}^{\,2} = 100$; $\quad \overline{AC} = \sqrt{100} = 10$.

Metodo 2 *(Ricavando la formula inversa e applicandola)*

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AH}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$; $\quad \overline{BH} = \frac{\overline{AH}^{\,2}}{\overline{CH}} = \frac{6^2}{8} = 4{,}5$.

$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = 4{,}5 + 8 = 12{,}5$.

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

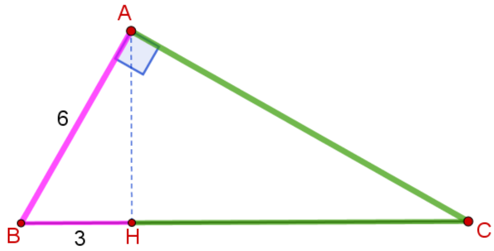
$\overline{AB}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$; $\quad \overline{AB} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{4{,}5 \cdot 12{,}5} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$.

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AC}^{\,2} = \overline{CH} \cdot \overline{BC}$; $\quad \overline{AC} = \sqrt{\overline{CH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{8 \cdot 12{,}5} = \sqrt{100} = 10$.

ESERCIZIO 8 **EUCLIDE** *(Senza utilizzare il Teorema di Pitagora)*

Nel triangolo rettangolo ABC determina le misure di AC, BC e AH.



<u>*Metodo 1*</u> *(Sostituendo i dati nella formula e risolvendo l'equazione ottenuta)*

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AB}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{BC}\,;\qquad 6^2 = 3 \cdot \overline{BC}\,;\qquad \overline{BC} = \dfrac{36}{3} = 12\,.$

$\overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH} = 12 - 3 = 9\,.$

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AC}^{\,2} = \overline{CH} \cdot \overline{BC}\,;\qquad \overline{AC}^{\,2} = 9 \cdot 12\,;\qquad \overline{AC}^{\,2} = 108\,;\qquad \overline{AC} = \sqrt{108} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,.$

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AH}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{CH}\,;\qquad \overline{AH}^{\,2} = 3 \cdot 9\,;\qquad \overline{AH}^{\,2} = 27\,;\qquad \overline{AH} = \sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,.$

<u>*Metodo 2*</u> *(Ricavando la formula inversa e applicandola)*

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AB}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{BC}\,;\qquad \overline{BC} = \dfrac{\overline{AH}^{\,2}}{\overline{BH}} = \dfrac{6^2}{8} = 12\,.$

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

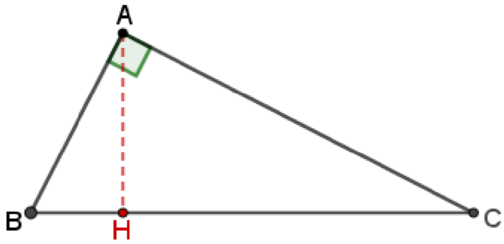
$\overline{AC}^{\,2} = \overline{CH} \cdot \overline{BC}\,;\qquad \overline{AC} = \sqrt{\overline{CH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{9 \cdot 12} = \sqrt{108} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,.$

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$\overline{AH}^{\,2} = \overline{BH} \cdot \overline{CH}\,;\qquad \overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{CH}} = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}\,.$

ESERCIZIO 9 EUCLIDE

In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano rispettivamente $\frac{25}{13}\,a$ e $\frac{144}{13}\,a$. Determina le misure dei lati del triangolo e la sua area.



Soluzione

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH}\cdot\overline{CH} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AH} = \sqrt{\overline{BH}\cdot\overline{CH}} = \sqrt{\frac{25}{13}\,a\cdot\frac{144}{13}\,a} = \sqrt{\frac{3600}{169}\,a^2} = \frac{60}{13}\,a\,.$$

$$\overline{BC} = \overline{BH}+\overline{CH} = \frac{25}{13}\,a+\frac{144}{13}\,a = \frac{25+144}{13}\,a = \frac{169}{13}\,a = 13\,a\,.$$

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BH}\cdot\overline{BC} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB} = \sqrt{\overline{BH}\cdot\overline{BC}} = \sqrt{\frac{25}{13}\,a\cdot 13\,a} = \sqrt{25a^2} = 5\,a\,.$$

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

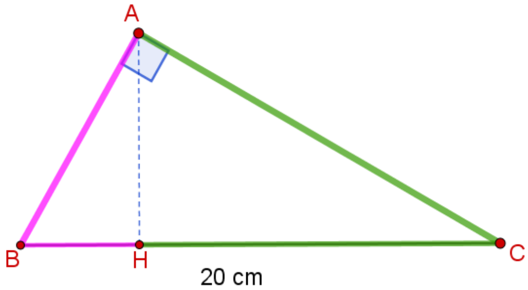
$$\overline{AC}^2 = \overline{CH}\cdot\overline{BC} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AC} = \sqrt{\overline{CH}\cdot\overline{BC}} = \sqrt{\frac{144}{13}\,a\cdot 13\,a} = \sqrt{144a^2} = 12\,a\,.$$

L'area del trapezio misura:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AH}}{2} = \frac{13\,a\cdot\frac{60}{13}\,a}{2} = \frac{60\,a^2}{2} = 30\,a^2\,.$$

ESERCIZIO 10 EUCLIDE

In un triangolo rettangolo di area $40\,cm^2$, l'ipotenusa è lunga $20\,cm$. Determina l'area del rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Soluzione

Determiniamo la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa:

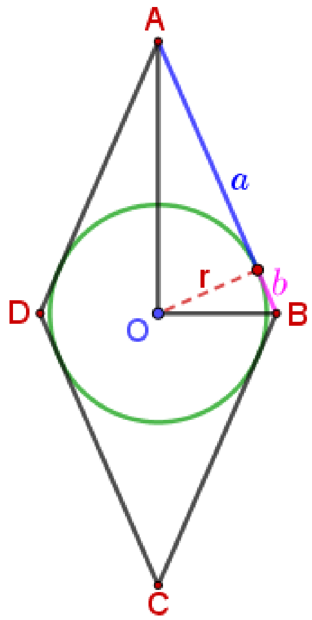
$$\overline{AH} = \frac{2\cdot S_{ABC}}{\overline{BC}} = \frac{2\cdot 40}{20}\,cm = 4\,cm\,.$$

Per il secondo Teorema di Euclide, il rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è equivalente al quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa.

Pertanto l'area del rettangolo è: $S_{R\,(BH,CH)} = \overline{AH}^2 = (4\,cm)^2 = 16\,cm^2$.

ESERCIZIO 11 EUCLIDE

La circonferenza inscritta in un rombo è tangente a uno dei lati del rombo in un punto che divide il lato stesso in due segmenti di misura a e b. Esprimi in funzione di a e b la misura del raggio della circonferenza inscritta.



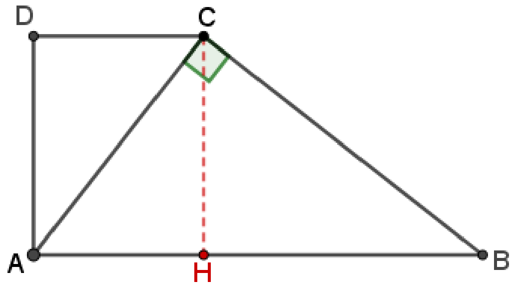
Soluzione

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo AOB si ha:

$r^2 = a \cdot b \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{a \cdot b}$

ESERCIZIO 12 EUCLIDE

In un trapezio rettangolo ABCD, di base maggiore AB, la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC. La diagonale AC è lunga $3\sqrt{5}\ cm$ e la base minore CD è lunga $3\ cm$. Determina il perimetro e l'area del trapezio.



Soluzione

Determiniamo la misura dell'altezza del trapezio applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACD:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2 - 3^2}\ cm = \sqrt{45 - 9}\ cm = \sqrt{36}\ cm = 6\ cm\,.$$

$\overline{CH} = \overline{AD} = 6\ cm\,.$

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BH} = \frac{\overline{CH}^2}{\overline{AH}} = \frac{6^2}{3}\,cm = 12\ cm$$

Inoltre: $\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} = (3 + 12)\ cm = 15\ cm\,.$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{6^2 + 12^2}\ cm = \sqrt{36 + 144}\ cm = \sqrt{180}\ cm = \sqrt{36} \cdot \sqrt{5}\ cm = 6\sqrt{5}\ cm\,.$$

Il perimetro del trapezio misura:

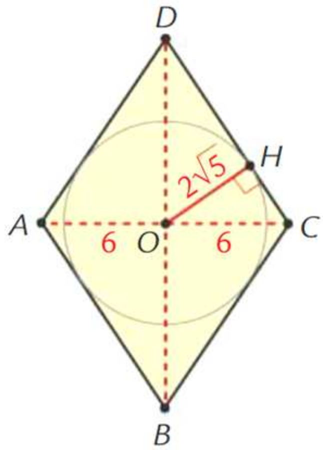
$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD} = \left(15 + 6\sqrt{5} + 3 + 6\right)\ cm = \left(24 + 6\sqrt{5}\right)\ cm\,.$$

L'area del trapezio misura:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{CH} = \frac{15 + 3}{2} \cdot 6\ cm^2 = 54\ cm^2\,.$$

ESERCIZIO 13 EUCLIDE

In un rombo, il raggio del cerchio inscritto è lungo $2\sqrt{5}\ cm$ e la diagonale minore è lunga $12\ cm$. Determina il perimetro del rombo.



Soluzione

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OCH si ha:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OH}^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2}\ cm = \sqrt{36-20}\ cm = \sqrt{16}\ cm = 4\ cm\,.$$

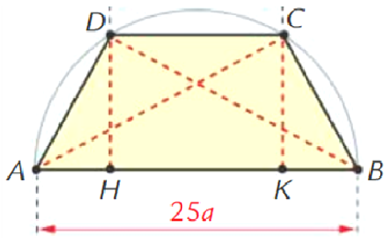
Applicando il 1° teorema di Euclide al triangolo rettangolo OCD si ha:

$$\overline{OC}^2 = \overline{CH}\cdot\overline{CD} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{CD} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{CH}} = \frac{6^2}{4}\ cm = 9\ cm\,.$$

Pertanto il perimetro del rombo è : $\quad p = 4\cdot\overline{CD} = 4\cdot 9\ cm = 36\ cm\,.$

ESERCIZIO 14 EUCLIDE

Un trapezio isoscele ABCD di base minore $\overline{CD} = 7a$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 25a$. Determina il perimetro e l'area del trapezio.



Soluzione

Determiniamo:

$$\overline{AH} = \overline{KB} = \frac{\overline{AB}-\overline{CD}}{2} = \frac{25a-7a}{2} = 9a \qquad\qquad \overline{HB} = \overline{AB}-\overline{AH} = 25a - 9a = 16a\,.$$

Applicando il 1° teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABD si ha:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AH}\cdot\overline{AB} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}\cdot\overline{AB}} = \sqrt{9a\cdot 25a} = \sqrt{225a} = 15a\,.$$

Applicando il 1° teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABD si ha:

$$\overline{DH}^2 = \overline{AH}\cdot\overline{HB} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{DH} = \sqrt{\overline{AH}\cdot\overline{HB}} = \sqrt{9a\cdot 16a} = \sqrt{144a} = 12a\,.$$

Pertanto il perimetro del trapezio è:

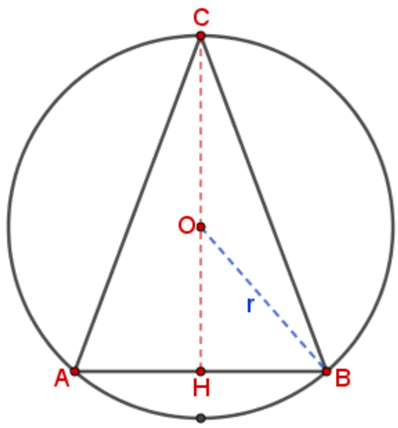
$$p = \overline{AB} - \overline{CD} + 2\cdot\overline{AD} = 25a + 7a + 2\cdot 15a = 62a\,.$$

Mentre l'area del trapezio è:

$$S = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\cdot\overline{DH} = \frac{25a+7a}{2}\cdot 12a = 192a^2\,.$$

ESERCIZIO 15 EUCLIDE

Un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, è inscritto in una circonferenza di raggio r. Sapendo che l'altezza relativa ad AB misura $\frac{9}{5}r$, determina il perimetro e l'area del triangolo.



Soluzione

Determiniamo la misura del segmento OH :

$$\overline{OH} = \overline{CH} - \overline{CO} = \frac{9}{5}r - r = \frac{4}{5}r\,.$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OHB calcoliamo:

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{4}{5}r\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{16}{25}r^2} = \sqrt{\frac{9}{25}r^2} = \frac{3}{5}\,r\,.$$

Pertanto la misura della base è:

$$\overline{AB} = 2\overline{HB} = 2 \cdot \frac{3}{5}r = \frac{6}{5}r\,.$$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCH calcoliamo:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{5}r\right)^2 + \left(\frac{3}{5}r\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{25}r^2 + \frac{9}{25}r^2} = \sqrt{\frac{90}{25}r^2} = \frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}\,r\,.$$

Determiniamo la misura del perimetro del triangolo:

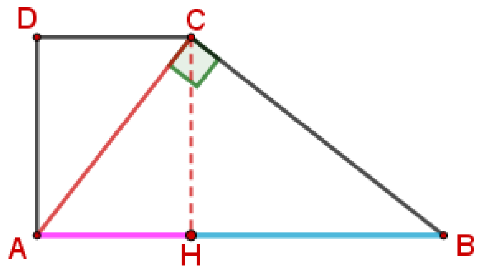
$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \frac{6}{5}r + \frac{3}{5}\sqrt{10}\,r\ \frac{3}{5}\sqrt{10}\,r = \frac{6 + 3\sqrt{10} + 3\sqrt{10}}{5}\,r = \frac{6 + 6\sqrt{10}}{5}\,r\ = \frac{\left(1+\sqrt{10}\right)\cdot 6r}{5}.$$

Determiniamo l'area del triangolo:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{2} = \frac{\frac{6}{5}r\cdot\frac{9}{5}r}{2} = \frac{\frac{54}{25}r^2}{2} = \frac{27}{25}r^2.$$

ESERCIZIO 16 EUCLIDE

In un trapezio rettangolo ABCD, di base maggiore AB, la diagonale minore AC è perpendicolare al lato obliquo. Dimostra che il quadrato costruito sulla diagonale AC è equivalente al rettangolo che ha per lati la base maggiore e la base minore del trapezio.



IPOTESI		*TESI*
ABCD è un trapezio rettangolo; $AC \perp BC$;	$\Rightarrow$	$q\,(AC) \doteq r\,(AB\,, DC)$

<u>*Dimostrazione*</u>

Per il 1° Teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo ABC, il quadrato costruito sul cateto AC è equivalente al rettangolo di lati AH e AB.

Ma $AH \cong DC$ *, si conclude la tesi, cioè che:*

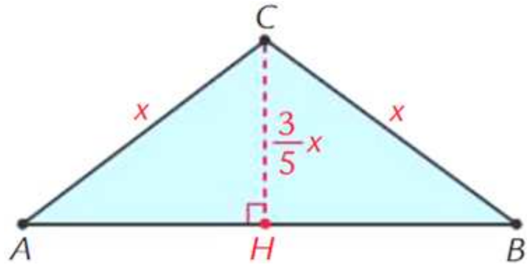
"Il quadrato costruito sul cateto AC è equivalente al rettangolo di lati AB e DC".

PROBLEMI SUL TEOREMA DI PITAGORA

(risolvibili per via algebrica)

ESERCIZIO 17 PITAGORA

In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, l'altezza relativa ad AB è $\frac{3}{5}$ del lato obliquo. Determina l'area del triangolo, sapendo che il suo perimetro è 36 cm.



$$\begin{cases} p_{ABCD} = 36\ cm \\ \overline{CH} = \frac{3}{5}\overline{AC} \end{cases} \qquad p = ?$$

Soluzione

Poniamo la misura del lato obliquo $\overline{AC} = \overline{BC} = x$, *con* $x > 0$.

Si ottiene: $\overline{CH} = \frac{3}{5}x$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ricava:

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{9}{25}x^2} = \sqrt{\frac{16}{25}x^2} = \frac{4}{5}x\,.$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{HB} = 2 \cdot \frac{4}{5}x = \frac{8}{5}x\,.$$

Imponendo che il perimetro del triangolo misuri 36 si ottiene.

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}\,; \qquad \frac{8}{5}x + x + x = 36\,; \qquad 8x + 5x + 5x = 180\,; \qquad 18x = 180\,; \qquad x = 10\,.$$

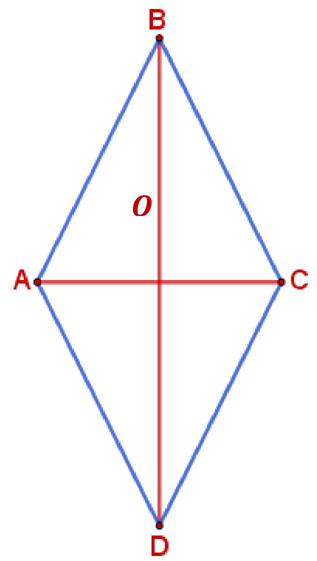
Pertanto: $\overline{CH} = \frac{3}{5}x = \frac{3}{5} \cdot 10\ cm = 6\ cm$.

Mentre: $\overline{AB} = \frac{8}{5}x = \frac{8}{5} \cdot 10\ cm = 16\ cm$.

L'area del triangolo è: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2}16 \cdot 6\ cm^2 = 48\ cm^2$.

ESERCIZIO 18 PITAGORA

In un rombo di area $36\ cm^2$ una diagonale è doppia dell'altra.
Qual è il perimetro del rombo?



$$\begin{cases} s_{ABCD} = 36\ cm^2 \\ \overline{BD} = 2\,\overline{AC} \end{cases} \qquad\qquad p\ = ?$$

<u>Soluzione</u>

Poniamo la misura della diagonale $\overline{AC} = x$, *con* $x > 0$.

Si ottiene: $\overline{BD} = 2x$.

Imponiamo che l'area del rombo sia $36\ cm^2$:

$$s_{ABCD} = 36\ cm^2\ ; \qquad \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2} = 36\ cm^2\ ; \qquad \frac{2x \cdot x}{2} = 36\ ;$$

$$x^2 = 36\ ; \qquad x = \mp\sqrt{36} = \begin{matrix} x_1 = -6 & \text{non accettabile} \\ x_2 = +6 & \text{accettabile} \end{matrix}$$

Pertanto: $\overline{AC} = 6\ cm$ $\qquad \overline{OC} = 3\ cm$ $\qquad \overline{BD} = 12\ cm$ $\qquad \overline{BO} = 6\ cm$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCO si ricava:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{BO}^2} = \sqrt{3^2 + 6^2}\ cm = \sqrt{45}\ cm = \sqrt{9}\sqrt{5}\ cm = 3\sqrt{5}\ cm\ .$$

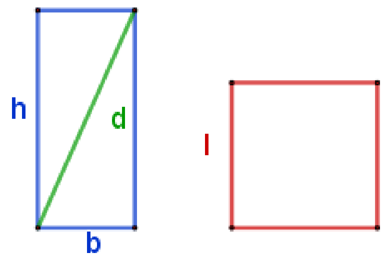
La misura del perimetro è: $p = 4 \cdot \overline{BC} = 4 \cdot 3\sqrt{5}\ cm = 12\sqrt{5}\ cm$.

ESERCIZIO 19 PITAGORA

Un rettangolo, equivalente a un quadrato di lato 12 cm, ha la base che è $\frac{4}{9}$ dell'altezza. Determina la lunghezza delle diagonali del rettangolo.

$$\begin{cases} Rettangolo \doteq Quadrato \\ b_R = \frac{4}{9} h_R \\ l_{Quadrato} = 12\ cm \end{cases}$$

$?\quad d =$



Soluzione

Essendo il $Rettangolo \doteq Quadrato$ *si ha:* $s_{Rettangolo} = s_{Quadrato}$

Pertanto $s_{Rettangolo} = s_{Quadrato} = l^2 = (12\ cm)^2 = 144\ cm^2$.

Poniamo la misura dell'altezza del rettangolo $h_R = x$, *con* $x > 0$.

Si ottiene: $b_R = \frac{4}{9} x$.

L'equazione che utilizza i dati del problema è data dalla formula dell'area del rettangolo:

$s_{ABCD} = b_R \cdot h_R$; $\quad 144 = \frac{4}{9} x \cdot x$; $\quad \frac{4}{9} x^2 = 144$; $\quad x^2 = \frac{9}{4} \cdot 144$; $\quad x^2 = 324$

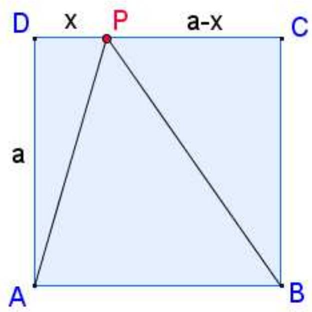
$$x = \mp\sqrt{324} = \begin{matrix} x_1 = -18 & non\ accettabile \\ x_2 = +18 & accettabile \end{matrix}$$

Pertanto: $h_R = 18\ cm$ *e* $b_R = \frac{4}{9} \cdot 18\ cm = 8\ cm$.

La misura della diagonale del rettangolo è:

$d = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{8^2 + 18^2}\ cm = \sqrt{64 + 324}\ cm = \sqrt{388}\ cm = \sqrt{4} \cdot \sqrt{97}\ cm = \mathbf{2\sqrt{97}}\ cm$.

ESERCIZIO 20 PITAGORA



Sia ABCD un quadrato il cui lato misura a. Determina un punto P, sul lato CD, in modo che risulti: $\overline{PA}^{\,2} + \overline{PB}^{\,2} = \frac{21}{8} a^2$.

Soluzione

Poniamo la misura del segmento $\overline{DP} = x$, *con* $0 \le x \le a$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ADP si ricava:

$\overline{PA}^{\,2} = \overline{AD}^{\,2} + \overline{DP}^{\,2} = a^{2} + x^{2}$;

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCP si ricava:

$\overline{PB}^{\,2} = \overline{BC}^{\,2} + \overline{PC}^{\,2} = a^{2} + (a-x)^{2} = a^{2} + a^{2} + x^2 - 2ax = 2a^{2} + x^2 - 2ax$;

La relazione: $\overline{PA}^{\,2} + \overline{PB}^{\,2} = \frac{21}{8} a^2$ *si traduce nella seguente equazione:*

$$a^{2} + x^{2} + 2a^{2} + x^2 - 2ax = \frac{21}{8} a^2 \;;$$

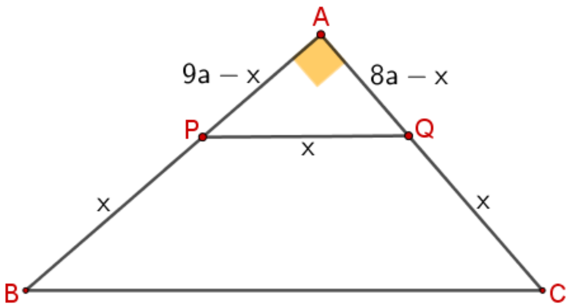
$$8a^2 + 8x^2 + 16a^2 + 8x^2 - 16ax = 21a^2 \;;$$

$$16x^2 - 16ax + 3a^2 = 0 \;; \qquad \frac{\Delta}{4} = (-8a)^2 - 16 \cdot 3a^2 = 64a^2 - 48a^2 = 16a^2 \,.$$

$$x_{1,2} = \frac{8a \mp \sqrt{16a^2}}{16} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{8a - 4a}{16} = \dfrac{1}{4} a \quad \textit{accettabile} \\ x_2 = \dfrac{8a + 4a}{16} = \dfrac{3}{4} a \quad \textit{accettabile} \end{array}$$

ESERCIZIO 21 PITAGORA

In un triangolo rettangolo di ipotenusa BC, risulta $\overline{AB} = 9a$ e $\overline{AC} = 8a$. Determina un punto P sul cateto AB e un punto Q sul cateto AC, in modo che risulti $\mathbf{BP} \cong \mathbf{PQ} \cong \mathbf{QC}$.



$$\begin{cases} \hat{A} = 90° \\ \overline{AB} = 9a \\ \overline{AC} = 8a \\ \mathrm{BP} \cong \mathrm{PQ} \cong \mathrm{QC} \end{cases} \qquad \boldsymbol{PB} = ?$$

Soluzione

Poniamo la misura del segmento $\overline{BP} = x$, $\quad 0 < x < 8a$.

Si ottiene: $\overline{PQ} = \overline{QC} = x$.

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC.

Anche APQ è un triangolo rettangolo di ipotenusa PQ.

L'equazione che riunisce i dati del problema è data dal Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo APQ.

$\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 = \overline{PQ}^2$; $\quad (9a - x)^2 + (8a - x)^2 = x^2$;

$81 + x^2 - 18x + 64 + x^2 - 16x = x^2$; $\quad x^2 - 34x + 145 = 0$;

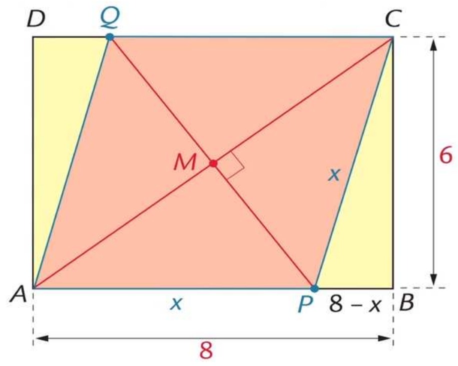
$\frac{\Delta}{4} = (-17)^2 - 1 \cdot 145 = 289 - 145 = 144$. $\quad x_{1,2} = 17 \mp \sqrt{144}$

$$= \begin{matrix} x_1 = 17 - 12 = 5a & \textit{accettabile} \\ x_2 = 17 + 12 = 29a & \textit{non accettabile} \end{matrix}$$

Pertanto $PB = 5a$.

ESERCIZIO 22 PITAGORA

In un rettangolo ABCD , $\overline{AB} = 8\ cm$ e $\overline{CD} = 6\ cm$. Determina due punti P e Q, rispettivamente su AB e CD, in modo che il quadrilatero APCQ sia un rombo. Determina inoltre la lunghezza di PQ.



DATI
$$\begin{cases} \overline{AB} = 8\ cm \\ \overline{CD} = 6\ cm \end{cases}$$

$\overline{AP} = ?$
$\overline{PQ} = ?$

<u>Soluzione</u>

Poniamo $\overline{AP} = x$ *con dominio di variabilità:* $0 < x < 8$.

Ricaviamo : $\overline{PB} = 8 - x$.

Dovendo essere il quadrilatero APCQ un rombo, si ha che: $\overline{PC} = \overline{QC} = \overline{AQ} = x$.

Applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PBC:

$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2$; $\quad x^2 = (8-x)^2 + 6^2$; $\quad x^2 = 64 + x^2 - 16x + 36$;

$16x = 100$; $\quad x = \dfrac{100}{16}$; $\quad x = \dfrac{25}{4}$.

Pertanto $\overline{AP} = \frac{25}{4}\ cm$.

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2}\ cm = \sqrt{64 + 36}\ cm = \sqrt{100}\ cm = 10\ cm\ .$$

$$\overline{CM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = 5\ cm\ .$$

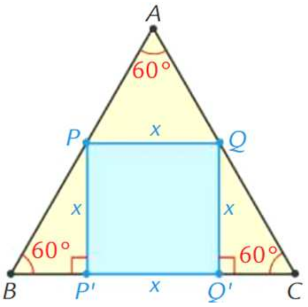
Essendo le diagonali del rombo perpendicolari tra loro, applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CMP:

$$\overline{PM} = \sqrt{\overline{PC}^2 - \overline{CM}^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2 - 5^2}\ cm = \sqrt{\frac{625}{16} - 25}\ cm = \sqrt{\frac{625 - 400}{16}}\ cm = \sqrt{\frac{225}{16}}\ cm = \frac{15}{4}\ cm\ .$$

Pertanto la lunghezza di PQ è

$$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{PM} = 2 \cdot \frac{15}{4}\ cm = \frac{15}{2}\ cm.$$

ESERCIZIO 23 PITAGORA

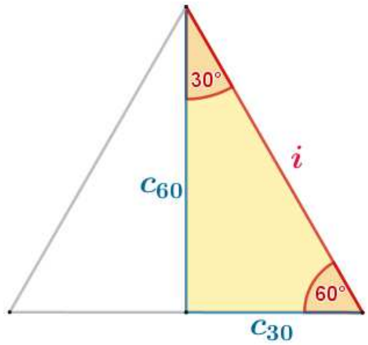


Nel triangolo equilatero ABC, il cui lato misura l, è inscritto un quadrato con un lato su BC. Determina la misura del lato del quadrato.

$$\begin{matrix} D \\ A \\ T \\ I \end{matrix} \begin{cases} ABC \text{ è } un\ triangolo\ equilatero; \\ \overline{BC} = l; \\ PQQ'P' \text{ è } un\ quadrato\ inscritto\ nel\ triangolo\ ABC; \\ l_{PQQ'P'} \in l_{ABC} \end{cases} \qquad \overline{PQ} = ?$$

<u>*Soluzione*</u>

Occorre ricordare che:

<table>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>$c_{30} = \frac{1}{2}\, i$</td><td>$c_{60} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$</td><td>$c_{30} = \frac{c_{60}}{\sqrt{3}}$</td></tr>
<tr><td>$i = 2\, c_{30}$</td><td>$i = \frac{2}{\sqrt{3}}\, c_{60}$</td><td>$c_{60} = \sqrt{3} \cdot c_{30}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">In un triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60°:
il cateto opposto all'angolo di 30° è congruente alla metà dell'ipotenusa;
il cateto opposto all'angolo di 60° è congruente al prodotto fra la metà dell'ipotenusa e la $\sqrt{3}$;
il cateto opposto all'angolo di 60° è congruente al prodotto fra il cateto opposto all'angolo di 30° e la $\sqrt{3}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c_{60} = \sqrt{i^2 - \left(\frac{1}{2}\, i\right)^2} = \sqrt{i^2 - \frac{1}{4}\, i^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\, i^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$</td><td colspan="2">$\frac{c_{30}}{c_{60}} = \frac{\frac{1}{2}\, i}{\frac{\sqrt{3}}{2}\, i}$; $\quad \frac{c_{30}}{c_{60}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$;
$\frac{c_{30}}{c_{60}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\quad c_{30} = \frac{c_{60}}{\sqrt{3}}$.</td></tr>
</table>

Poniamo la misura del lato del quadrato $\overline{PQ} = x$ *con* $0 < x < l$.

Nel triangolo rettangolo BPP' *si ha:*

$$\overline{BP'} = \overline{CQ'} = \frac{x}{\sqrt{3}} \ .$$

Osservando la figura si ricava:

$$\overline{BC} = \overline{BQ'} + \overline{P'Q'} + \overline{Q'C} \ ;$$

$$l = \frac{x}{\sqrt{3}} + x + \frac{x}{\sqrt{3}} \ ;$$

$$\sqrt{3}\, l = x + \sqrt{3}\, x + x \ ;$$

$$\left(2 + \sqrt{3}\right) x = \sqrt{3}\, l \ ;$$

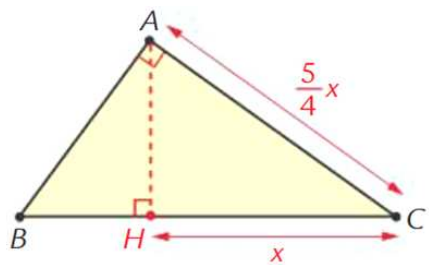
$$x = \frac{\sqrt{3}\, l}{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}\, l = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4 - 3}\, l = \boldsymbol{\left(2\sqrt{3} - 3\right) l} \ .$$

PROBLEMI SUL TEOREMA DI EUCLIDE

(risolvibili per via algebrica)

ESERCIZIO 24 EUCLIDE

In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che il perimetro del triangolo è 24 cm, determina l'area del triangolo.



$$\begin{cases} p_{ABCD} = 24\ cm \\ \overline{AC} = \frac{5}{4}\overline{HC} \end{cases} \qquad p = ?$$

Soluzione

Poniamo $\overline{HC} = x$ *con dominio di variabilità:* $0 < x < 12$.

Ricaviamo: $\overline{AC} = \frac{5}{4}x$.

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ottiene:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC}\ ; \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{HC}} = \frac{\left(\frac{5}{4}x\right)^2}{x} = \frac{\frac{25}{16}x^2}{x} = \frac{25}{16}x\ .$$

Ricaviamo la misura della proiezione: $\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC} = \frac{25}{16}x - x = \frac{9}{16}x$.

Applicando il 1° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ottiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH}\ ; \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{BH}} = \sqrt{\frac{25}{16}x \cdot \frac{9}{16}x} = \sqrt{\frac{225}{256}x^2} = \frac{15}{16}x\ .$$

Imponendo che il perimetro del triangolo misuri 24 cm si ottiene.

$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$;

$$\frac{15}{16}x + \frac{25}{16}x + \frac{5}{4}x = 24\ ; \qquad \frac{15+25+20}{16}x = 24\ ; \qquad \frac{60}{16}x = 24\ ; \qquad x = \frac{16}{60} \cdot 24\ ; \qquad x = \frac{32}{5}.$$

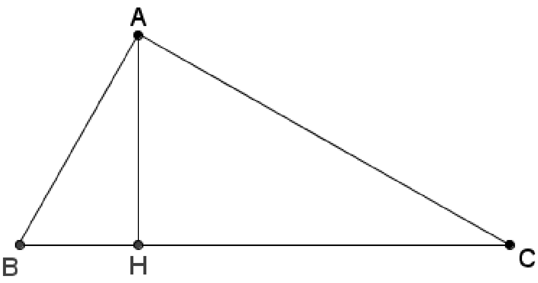
Pertanto: $\overline{AB} = \frac{15}{16} \cdot \frac{32}{5}\ cm = 6\ cm$.

$$\overline{AC} = \frac{5}{4} \cdot \frac{32}{5}\ cm = 8\ cm\ .$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\ cm^2 = \mathbf{24}\ cm^2\ .$$

ESERCIZIO 25 EUCLIDE

Nel triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa misura 8 cm e l'altezza relativa all'ipotenusa $\sqrt{15}$ cm. Determina le misure dei lati.



DATI $\begin{cases} \overline{AH} = \sqrt{15}cm \\ \overline{BC} = 8\ cm \end{cases}$ $\qquad \overline{AB} = ?$ $\quad \overline{AC} = ?$

Soluzione

Poniamo $\overline{BH} = x$ *con dominio di variabilità:* $0 < x < 8$.

Ricaviamo : $\overline{HC} = 8 - x$

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC, $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$ *ricaviamo:*

$$\left(\sqrt{15}\right)^2 = x \cdot (8 - x)\ ; \qquad 15 = 8x - x^2\ ; \qquad x^2 - 8x + 15 = 0\ ; \qquad \frac{\Delta}{4} = 4^2 - 1 \cdot 15 = 1\ .$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{1} = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ \\ x_2 = 5 \end{matrix}$$ *Soluzioni entrambe accettabili.*

Pertanto $\overline{BH} = 3\ cm$ *e* $\overline{HC} = 5\ cm$ *(oppure* $\overline{BH} = 5\ cm$ *e* $\overline{HC} = 3\ cm$*)*

Applicando il 1° T. di Euclide al triangolo rettangolo ABC, $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$ *ricaviamo:*

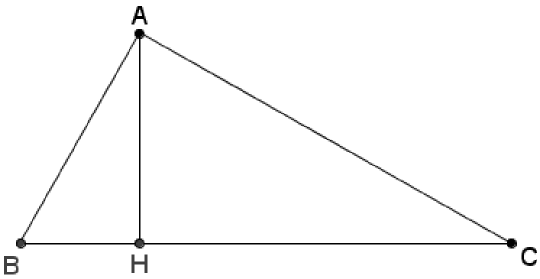
$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{3 \cdot 8}\ cm = \sqrt{24}\ cm = 2\sqrt{6}\ \ cm.$$

Applicando il 1° T. di Euclide al triangolo rettangolo ABC, $\overline{AC}^2 = \overline{HC} \cdot \overline{BC}$ *ricaviamo:*

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{HC} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{5 \cdot 8} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\ \ cm\ .$$

ESERCIZIO 26 EUCLIDE

Nel triangolo rettangolo ABC il cateto AB misura 6 cm e la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa misura 9 cm. Determina le misure dei lati.



D A T I $\begin{cases} \overline{AB} = 6cm \\ \overline{HC} = 9\ cm \end{cases}$ $\quad\quad$ $\overline{BC} = ?$ $\quad$ $\overline{AC} = ?$

Soluzione

Poniamo $\overline{BH} = x$ *con dominio di variabilità:* $0 < x < 6.$

Ricaviamo : $\overline{BC} = x + 9$

Applicando il 1° T di Euclide al triangolo rettangolo ABC, ricaviamo $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$*:*

$6^2 = x \cdot (x + 9)$; $\quad 36 = x^2 + 9x$; $\quad x^2 + 9x - 36 = 0$;

$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 81 + 144 = 225$.

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 1} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-9-15}{2} = -12 \ \ non\ accettabile \\ x_2 = \dfrac{-9+15}{2} = +3 \quad accettabile \end{array}$$

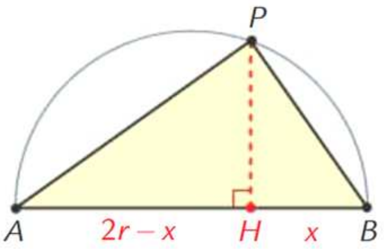
Pertanto $\overline{BH} = 3\ cm$ *e* $\overline{BC} = 12\ cm$.

Applicando il 1° T di Euclide al triangolo rettangolo ABC, $\overline{AC}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{BC}$ *ricaviamo:*

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CH} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{9 \cdot 12}\ cm = \sqrt{108}\ cm = 6\sqrt{3}\ cm$.

ESERCIZIO 27 EUCLIDE

Determina su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ un punto P tale che, indicata con H la proiezione di P su AB, risulti $\overline{AP}^2 + \overline{PH}^2 = 8\,\overline{HB}^2$.



D
A
T
I

$$\begin{cases} r \text{ è } il\ raggio\ della\ semicirconferenza \\ \overline{AB} = 2r \\ P \in semicirconferenza \end{cases} \qquad \overline{HB} = ?$$

<u>Soluzione</u>

Poniamo la misura del segmento $\overline{HB} = x$ *con* $0 < x < 2r$.

Applicando il 1° T di Euclide al triangolo rettangolo APB, ricaviamo

$\overline{AP}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = 2r \cdot (2r - x)$;

$\overline{PH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} = x \cdot (2r - x)$;

Dalla relazione $\overline{AP}^{\,2} + \overline{PH}^{\,2} = 8\,\overline{HB}^{\,2}$ *si ottiene:*

$2r \cdot (2r - x) + x \cdot (2r - x) = 8x^2$;

$4r^2 - 2rx + 2rx - x^2 = 8x^2$;

$9x^2 = 4r^2$;

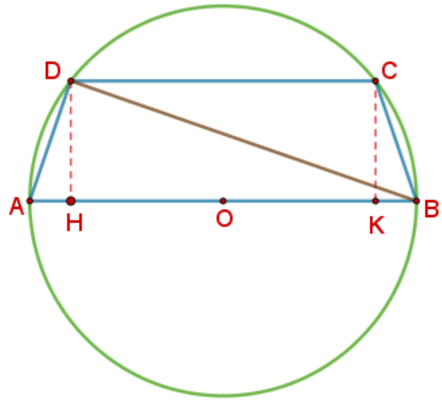
$x^2 = \dfrac{4}{9}r^2$; $\qquad x = \mp\dfrac{2}{3}r$.

Ovviamente solo la soluzione positiva è accettabile.

Pertanto: $\overline{HB} = \frac{2}{3}r$.

ESERCIZIO 28 **EUCLIDE**

Un trapezio isoscele ABCD è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e la misura della sua altezza è la metà del raggio. Determina l'area del trapezio.



$$\begin{cases} ABCD \text{ è un trapezio isoscele inscritto in una} \\ \text{una semicirconferenza di diametro } \overline{AB} = 2r; \\ \overline{DH} = \frac{1}{2}r\,. \end{cases} \qquad S_{ABCD} = ?$$

<u>*Soluzione*</u>

Poniamo la misura di $\overline{AH} = x$, $\quad 0 < x < r$. *Si ottiene:* $\overline{HB} = 2r - x$.

Applicando il 2° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABD si ricava:
(è un triangolo rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza).

$$\overline{DH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}\,; \qquad \left(\frac{1}{2}r\right)^2 = x \cdot (2r - x)\,; \qquad \frac{1}{4}r^2 = 2rx - x^2\,; \qquad x^2 - 2rx + \frac{1}{4}r^2 = 0\,;$$

$$4x^2 - 8rx + r^2 = 0\,; \qquad \frac{\Delta}{4} = (-4r)^2 - 4 \cdot r^2 = 16r^2 - 4r^2 = 12r^2\,.$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \mp \sqrt{12r^2}}{4} = \begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{4 - 2\sqrt{3}\,r}{4} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}\,r > 0 & \quad accettabile \\ x_2 = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}\,r}{4} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}\,r > 0 & \quad accettabile \end{array}$$

Pertanto $\overline{AH} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,r$ *e* $\overline{HB} = 2r - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,r = \frac{4-(2-\sqrt{3})}{2}\,r = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\,r$

Oppure $\overline{AH} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\,r$ *e* $\overline{HB} = 2r - \frac{2+\sqrt{3}}{2}\,r = \frac{4-(2+\sqrt{3})}{2}\,r = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,r$ *(soluzioni simmetriche)*

Consideriamo $\boldsymbol{\overline{AH} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,r}$.

Essendo il trapezio ABCD isoscele, si ha: $\overline{KB} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,r$.

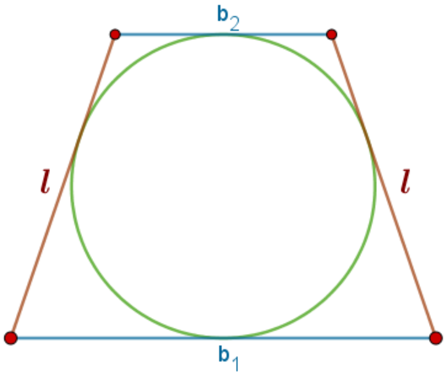
Ricaviamo la misura della base minore:

$$\boldsymbol{\overline{CD}} = \overline{HK} = \overline{AB} - \overline{AH} - \overline{KB} = 2r - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,r - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,r = 2r - \left(2 - \sqrt{3}\right)r = 2r - 2r + \sqrt{3}\,r = \boldsymbol{\sqrt{3}\,r}\,.$$

L'area del trapezio è :

$$\boldsymbol{S_{ABCD}} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DH} = \frac{2r + \sqrt{3}\,r}{2} \cdot \frac{1}{2}r = \boldsymbol{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}\,r^2}\,.$$

ESERCIZIO 29 EUCLIDE



In un trapezio isoscele, circoscritto a una circonferenza, l'area misura $20a^2$ e il perimetro misura $20a$. Determina le misure dei lati del trapezio.

$$\begin{cases} ABCD \text{ è un trapezio isoscele di base} \\ AB \ \text{ circoscritto alla circonferenza} \\ S = 20a^2 \\ p = 20\ a \end{cases}$$

$\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{b_1},\ \boldsymbol{b_2} = ?$

Soluzione

Siano $\boldsymbol{b_1}$ *e* $\boldsymbol{b_2}$ *le misure delle basi del trapezio.*

Sia $\boldsymbol{l}$ *la misura del lato obliquo.*

Sappiamo che il perimetro $p = 20\ a$. *Si ha quindi:*

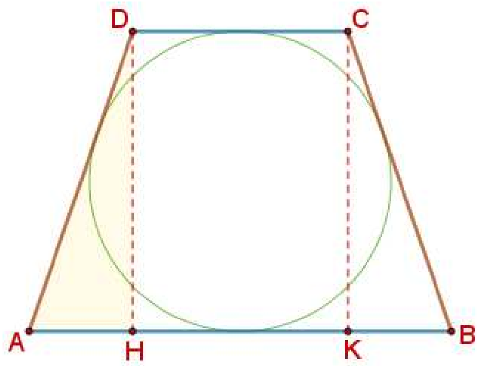
$b_1 + b_2 + l + l = 20\ a$

In un quadrilatero circoscritto a una circonferenza la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due, cioè: $b_1 + b_2 = l + l$.

Sostituendo si ha: $l + l + l + l = 20\ a$; $4l = 20a$; $\boldsymbol{l = 5a}$.

Da cui si ricava che: $b_1 + b_2 = 10\ a$.

Sappiamo che l'area misura $20a^2$. *Si ha quindi:*



$\dfrac{b_1 + b_2}{2} \cdot h = 20\ a^2$; $\dfrac{10\ a}{2} \cdot h = 20\ a^2$;

$5\ a \cdot h = 20\ a^2$; $h = 4\ a$.

Applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ADH.

$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DH}^2} = \sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a$.

Dalla relazione $b_1 + b_2 = 10\ a$ *si ha:*

$\overline{AH} + \overline{HK} + \overline{KB} + \overline{CD} = 10\ a$;

$3a + b_1 + 3a + b_1 = 10\ a$; $2b_1 = 4\ a$; $\boldsymbol{b_1 = 2\ a}$.

La base maggiore misura:

$\boldsymbol{b_2} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{KB} = 3a + 2a + 3a = \boldsymbol{8a}$.