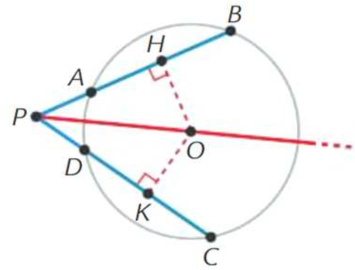
CIRCONFERENZA E CERCHIO

Esercizio 1

In una circonferenza di centro O, siano AB e CD due corde congruenti, non parallele e prive di punti di intersezione (A, B, C, D si susseguono sulla circonferenza in quest'ordine). Chiama P il punto di intersezione dei loro prolungamenti e dimostra che la semiretta PO è la bisettrice dell'angolo $\boldsymbol{B\widehat{P}C}$.



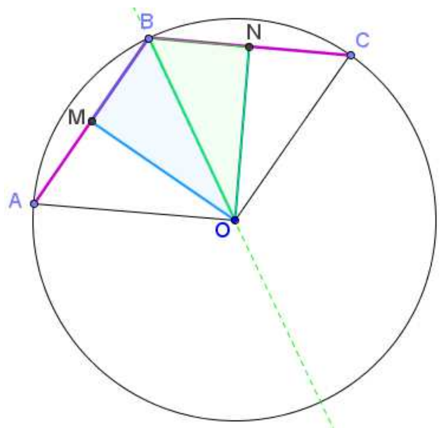
IPOTESI		*TESI*
$AB \cong CD$; C è $il\ centro\ della\ circonferenza$; $P = PB \cap PC$	$\Rightarrow$	$B\hat{P}O \cong C\hat{P}O$

Dimostrazione

Considera i due triangoli rettangoli OHP e OKP
$OH \cong OK$ *perché corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro.*
Dunque tali triangoli sono congruenti in base al 4° Criterio di Congruenza dei Triangoli Rettangoli;
in particolare sara` $\widehat{BPO} \cong \widehat{CPO}$,
quindi si ha la Tesi, cioè che la semiretta PO è la bisettrice dell'angolo $\widehat{BPC}$.

Esercizio 2

In una circonferenza di centro O, siano AB e BC due corde. Dimostra che, se la semiretta BO è la bisettrice dell'angolo $\mathbf{A\hat{B}C}$, allora le due corde sono congruenti.



IPOTESI		*TESI*
O è il centro della circonferenza; AB *e* CD *sono due corde* *BO è la bisettrice dell'angolo* $A\hat{B}C$	$\Rightarrow$	$AB \cong BC$

Dimostrazione

Conduciamo dal centro O le perpendicolari alle due corde AB e BC.

Consideriamo i due triangoli rettangoli OBM e OBN.

Questi due triangoli rettangoli OBM e OBN sono congruenti per il II CCTR.

Infatti hanno:

$A\hat{B}O \cong O\hat{B}C$ *per ipotesi*

OB *lato in comune ai due triangoli.*

$O\widehat{M}B \cong O\widehat{N} = 90°$

Avendo dimostrato che i due triangoli rettangoli OBM e OBN sono congruenti, si ha che: $BM \cong BN$.

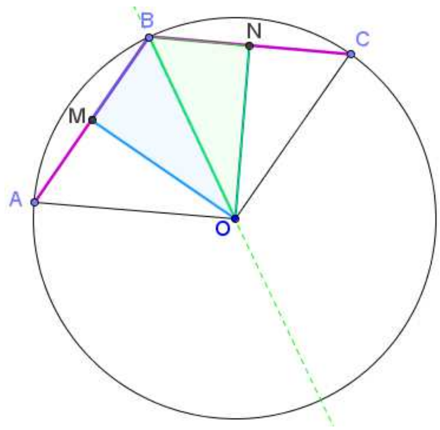
Inoltre, per il Teorema della PERPENDICOLARE A UNA CORDA (La perpendicolare a una corda condotta dal centro è asse della corda), si ha che: $AM \cong BM$ *e* $BN \cong NC$.

In conclusione si ottiene: $AB \cong 2BM \cong 2BN \cong BC$

Per la proprietà transitiva si conclude che $AB \cong CD$.

Esercizio 3

In una circonferenza di centro O, siano AB e BC due corde congruenti.
Dimostra che la semiretta BO è la bisettrice dell'angolo $\mathbf{A\hat{B}C}$.



IPOTESI		*TESI*
$AB \cong BC$	$\Rightarrow$	$A\hat{B}O \cong O\hat{B}C$

<u>Dimostrazione</u>

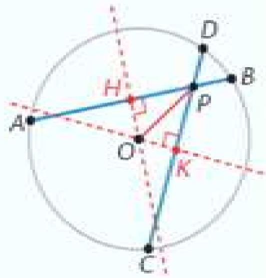
Conduciamo dal centro O le perpendicolari alle due corde AB e BC.
Essendo le due corde AB *e* BC *congruenti, esse hanno*
la stessa distanza dal centro, cioè: $OM \cong ON$
Consideriamo ora, i due triangoli rettangoli OBM e OBN.
Questi due triangoli rettangoli OBM e OBN sono congruenti per il IV CCTR.
Infatti hanno:

$OM \cong ON$	*stessa distanza dal centro*
OB	*lato in comune ai due triangoli.*
$O\hat{M}B \cong O\hat{N}B = 90°$	

Avendo dimostrato che i due triangoli rettangoli OBM e OBN sono congruenti, si ha che: $A\hat{B}O \cong O\hat{B}C$.

<u>Osservazione</u>
Si poteva utilizzare nella dimostrazione anche questo altro dato:
Le perpendicolari alle due corde AB e BC dividono le corde in due segmenti congruenti: $AM \cong MB$ *e* $BN \cong NC$.
Pertanto $MB \cong \frac{1}{2}AB \cong \frac{1}{2}BC \cong BN$.

Esercizio 4



Due corde congruenti di una circonferenza si incontrano in un punto P. Dimostra che i due segmenti in cui l'una resta divisa da P sono congruenti ai due segmenti in cui l'altra resta divisa da P.

IPOTESI AB e CD sono due corde; $AB \cap CD = \{P\}$; $AB \cong$ CD

TESI $BP \cong DP$ e $AP \cong CP$

DIMOSTRAZIONE

- Traccia da O le due rette perpendicolari ad AB e a CD, indicando con H e K le loro intersezioni con le corde stesse.
- Osserva che:

  $AH \cong CK$ perché OH e OK sono anche mediane dei triangoli ABO e OCD. [*]
- Considera i triangoli rettangoli POH e POK. Essi hanno:
- OP in comune;
- $OH \cong OK$ perché corde congruenti hanno la stessa distanza dal centro

  Dunque i triangoli POH e POK sono congruenti per il IV C.C.T.R. ; in particolare:

  $PH \cong PK$ [**]
- Osserva che:

  $AP \cong AH + PH$ e $CP \cong CK + PK$

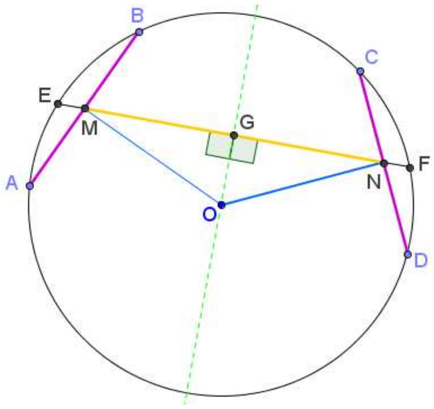
  Dunque, in base a [*] e [**], puoi dire che AP e CP sono congruenti in quanto somme di segmenti congruenti
- Osserva che:

  $PB \cong AB - AP$ e $PD \cong CD - CP$

  Poiché $AB \cong CD$ (per ipotesi) e $AP \cong CP$ (per quanto appena dimostrato), puoi dire che anche PB e PD sono congruenti perché differenze di segmenti congruenti

Esercizio 5

Siano AB e CD due corde congruenti e siano M ed N, rispettivamente, i loro punti medi. La retta MN incontra la cironferenza in due punti E ed F. Dimostra che $EM \cong FN$.



IPOTESI		*TESI*
$AB \cong CD$; $AM \cong BM$;	$\Rightarrow$	$EM \cong FN$

<u>*Dimostrazione*</u>

Conduciamo dal centro O della circonferenza la perpendicolare alla corda EF.

Tale perpendicolare divide la corda EF in due segmenti congruenti: $EG \cong GF$

Consideriamo poi i due triangoli rettangoli OGM e OGN.

Questi due triangoli rettangoli OGM e OGN sono congruenti per il IV CCTR.

Infatti hanno:

$OM \cong ON$ *perché se due corde sono congruenti* ($AB \cong CD$)*, allora hanno la stessa distanza dal centro;*

OG *lato in comune ai due triangoli.*

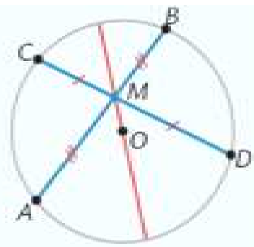
Avendo dimostrato che i due triangoli rettangoli OGM e OGF sono congruenti, si ha che: $MG \cong GN$.

Si ottiene: $EM \cong EG - MG \cong GF - GN \cong FN$

Cioè la tesi: $EM \cong FN$.

Esercizio 6

Dimostra che, se due corde distinte AB e CD si incontrano nel loro punto medio, allora sono diametri.



IPOTESI AB e CD sono due corde di una circonferenza; $\{M\} = AB \cap CD$,
$AM \cong MB$ e $CM \cong MD$

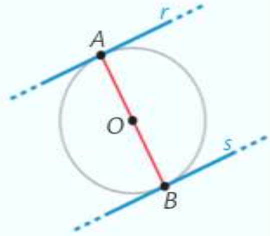
TESI AB e CD sono diametri

DIMOSTRAZIONE

- Supponi, *per assurdo*, che il punto di intersezione M delle due corde sia diverso dal centro O della circonferenza. Allora, potresti condurre il diametro passante per M (in rosso in figura).
- Poiché M è il punto medio di AB, il diametro passante per M dovrebbe essere perpendicolare ad AB. Analogamente, poiché M è anche il punto medio di CD, il diametro per M dovrebbe essere perpendicolare a CD.
  Ma allora AB e CD, essendo entrambe perpendicolari al diametro passante per M, dovrebbero essere parallele o coincidenti.
  Il che è assurdo, poiché, per ipotesi, AB e CD sono distinte e hanno in comune il punto M.
- Di conseguenza, il punto M deve coincidere con il centro della circonferenza, quindi AB e CD sono diametri .

Esercizio 7

Dimostra che, se le tangenti condotte dagli estremi di una corda AB sono parallele, allora la corda AB è un diametro.



IPOTESI *R tangente a C in A; s tangente a C in B; r parallela a s*

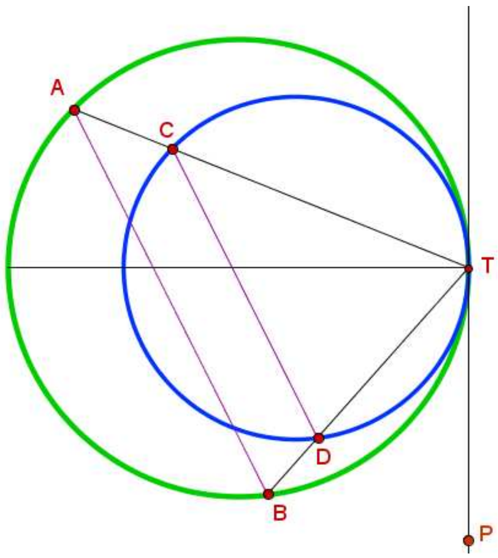
TESI *AB è un diametro*

DIMOSTRAZIONE

- La retta r, tangente alla circonferenza in A, e il raggio OA sono *ortogonali*
- La retta s, tangente alla circonferenza in B, e il raggio OB sono *ortogonali*
- Ma allora le rette OA e OB, essendo entrambe *ortogonali* alle rette parallele r e s, sono *coincidenti*
- In conclusione: *AB è un diametro.*

Esercizio 8

Due circonferenze sono tangenti internamente in T. Due corde AT e BT della circonferenza di raggio maggiore intersecano la circonferenza di raggio minore, rispettivamente, in C e D. Dimostra che $AB \parallel CD$.



IPOTESI		*TESI*
C e C' sono due circonferenze tangenti internamente in T; *AT e BT sono corde della circonferenza di raggio maggiore;* $AT \cap C' = \{C\}$; $BT \cap C' = \{D\}$.	$\Rightarrow$	$AB \parallel CD$

<u>*Dimostrazione*</u>

$B\hat{A}T \cong B\hat{T}P$ *angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco BT;*

$B\hat{T}P \cong D\hat{C}T$ *angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco DT;*

$B\hat{A}T \cong D\hat{C}T$ *per la proprietà transitiva;*

Essendo $B\hat{A}T \cong D\hat{C}T$ *angoli corrispondenti fra le rette AB e CD tagliate dalla trasversale AT, per il "Teorema delle rette parallele tagliate da una trasversale", si conclude che* $AB \parallel CD$.

Esercizio 9

a. per due punti distinti passa una e una sola circonferenza V F

b. se due rette tangenti a una circonferenza sono parallele, allora il segmento che congiunge i punti di tangenza è un diametro V F

c. se una retta dista 6 cm dal centro di una circonferenza il cui diametro è lungo 10 cm, essa è secante rispetto alla circonferenza V F

d. se gli angoli alla circonferenza corrispondenti a due corde *AB* e *CD* di una stessa circonferenza sono congruenti, allora le due corde hanno la stessa distanza dal centro della circonferenza V F

e. un angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro V F

f. per ogni angolo al centro, esistono almeno due angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco dell'angolo al centro V F

g. per ogni angolo alla circonferenza, esistono almeno due angoli al centro che insistono sullo stesso arco dell'angolo alla circonferenza V F

h. nessun angolo alla circonferenza può avere ampiezza uguale a 85° V F

Soluzione

a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
F	V	F	V	V	V	F	F

Esercizio 10

1 Quale delle seguenti proposizioni è *falsa*?

A Ogni settore circolare è convesso

B Il cerchio è una figura convessa

C Un segmento circolare è una figura convessa

D La circonferenza è una figura concava

2 La somma delle ampiezze di un angolo alla circonferenza e del corrispondente angolo al centro è 69°. Qual è l'ampiezza dell'angolo alla circonferenza?

A 23° B 24° C 25° D 26°

3 Le circonferenze tangenti in un punto dato a una retta assegnata:

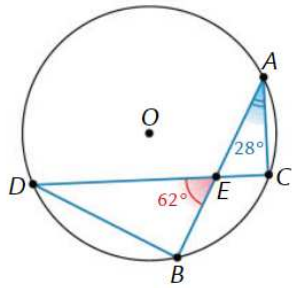
A hanno tutte lo stesso centro

B hanno tutte lo stesso raggio

C hanno i centri allineati

D nessuna delle precedenti risposte è esatta

4 In riferimento alla figura, in cui $AB \cap CD = \{E\}$, si può affermare che:



A la corda AD è un diametro

B la corda AD non è un diametro ed è congruente alla corda DC

C la corda AD non è un diametro ed è congruente alla corda AB

D nessuna delle precedenti risposte è corretta

5 Da un punto P, esterno a una circonferenza, si conducono le due rette tangenti alla circonferenza. Siano A e B i punti di contatto delle rette con la circonferenza. Quale delle seguenti affermazioni è *falsa*?

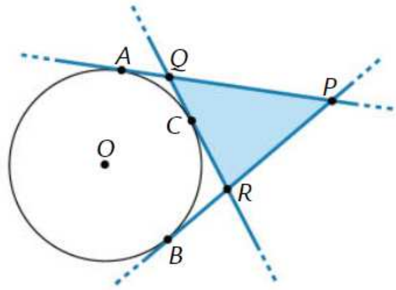
A L'altezza relativa ad AB del triangolo APB è anche mediana relativa ad AB

B AB può essere un diametro della circonferenza

C Esiste certamente una circonferenza passante per A, P e B

D Il triangolo APB può essere equilatero

6 Il triangolo PQR in figura è formato dalle tangenti alla circonferenza nei punti A, B e C. Sapendo che $AP = 12$ cm, che cosa si può dire del perimetro del triangolo PQR?



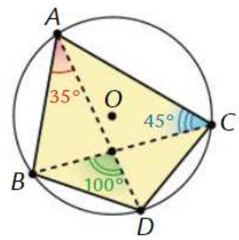
A È uguale a 20 cm

B È uguale a 22 cm

C È uguale a 24 cm

D I dati sono insufficienti per determinare il perimetro di PQR, poiché esso dipende dalla posizione di C

7 Quali sono le ampiezze degli angoli del quadrilatero $ABDC$ in figura?



A $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{B} = 100°$, $\widehat{C} = 80°$, $\widehat{D} = 110°$

B $\widehat{A} = 68°$, $\widehat{B} = 102°$, $\widehat{C} = 78°$, $\widehat{D} = 112°$

C $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 110°$, $\widehat{C} = 70°$, $\widehat{D} = 120°$

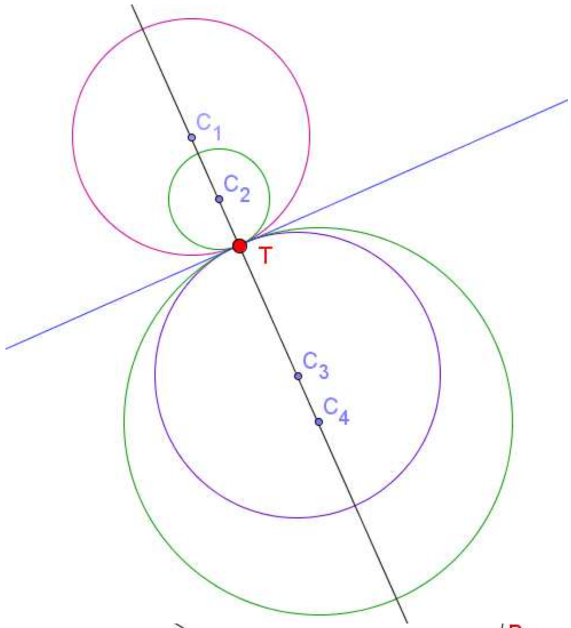
D $\widehat{A} = 75°$, $\widehat{B} = 95°$, $\widehat{C} = 85°$, $\widehat{D} = 105°$

Soluzione quesiti

1	2	3	4	5	6	7
A	A	C	A	B	C	A

Soluzione quesito 2

Poniamo l'ampiezza dell'angolo alla circonferenza uguale a $\boldsymbol{x}$ *,*
l'angolo al centro corrispondente avrà ampiezza $2\boldsymbol{x}$ **.**
Si ottiene la seguente equazione: $x + 2x = 69$; $3x = 69$; $x = 23$.



Soluzione quesito 3

Vedi figura a lato.

Soluzione quesito 6

$\overline{PA} = \overline{PB} = 12\ cm$.

Poniamo $\overline{AQ} = x,\quad x > 0$

Si ha: $\overline{QC} = x$

Poniamo $\overline{CR} = y,\quad y > 0$

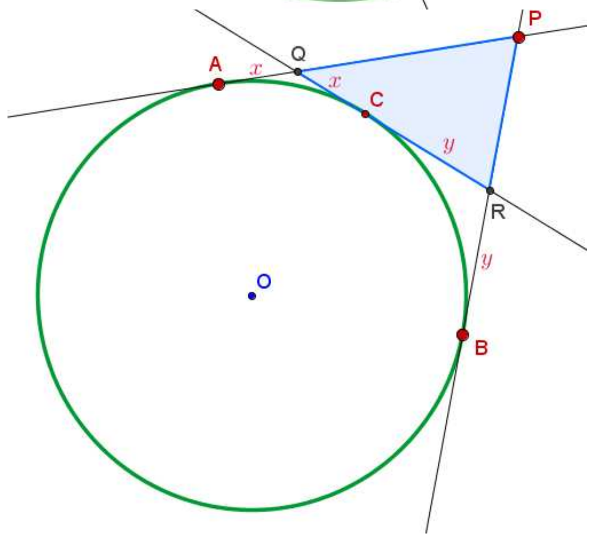
Si ha: $\overline{BR} = y$

Il perimetro è:

$p_{PQR} = \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{PR} =$

$= (12 - x) + (x + y) + (12 - y) =$

$= 12 + 12 = 24$.



Soluzione quesito 7

Occorre osservare gli angoli alla circonferenza che insistono sugli stessi archi e
ricordare che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.

$A\hat{E}C = 100°$ *opposto al vertice* $B\hat{E}D$

$E\hat{A}C = 35°$ *somma degli angoli interni =* $180°$

$A\hat{E}B = 80°$ *supplementare di* $B\hat{E}D$

$D\hat{E}C = 80°$ *supplementare di* $A\hat{E}C$

$A\hat{D}B = A\hat{C}B = 45°$ *insistono sullo stesso arco AB*

$B\hat{C}D = B\hat{A}D = 35°$ *insistono sullo stesso arco AB*

Ecc . . .