Fascio di rette

Esempio 1

Studiare il fascio di rette $\boldsymbol{3x-2y+4+k(2x+y-2)=0}$.

Soluzione

1. Determiniamo le rette generatrici del fascio:

Per $k=0 \quad \longrightarrow \quad 3x-2y+4=0$ (I^a^ retta generatrice)

Per nessun valore di k $(k=\infty) \quad \longrightarrow \quad 2x+y-2=0$ (II^a^ retta generatrice)

2. Determiniamo il coefficiente angolare, riscrivendo il fascio in forma implicita:

$3x-3y+4+2kx+ky-2k=0$;

$(3+2k)x+(k-2)y+2(2-k)=0$.

$m=-\frac{a}{b}=-\frac{3+2k}{k-2}$. Essendo il coefficiente angolare dipendente dal parametro k, il fascio è proprio.

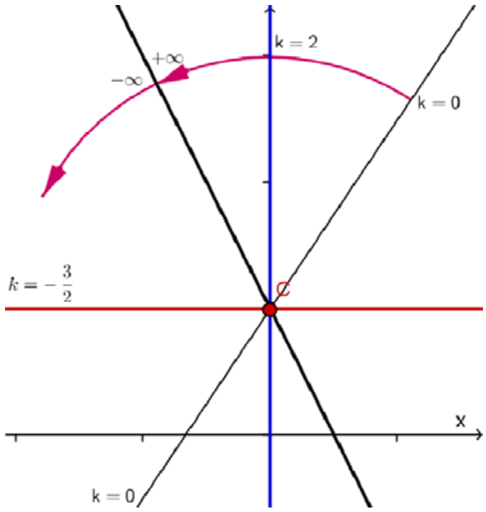
3. Determiniamo le coordinate del centro del fascio, annullando i coefficienti delle due incognite:

$$\left.\begin{array}{lllll} Per \quad k=-\frac{3}{2} & \longrightarrow & -\frac{7}{2}y+\frac{14}{2}=0 & \longrightarrow & y-2=0 \\ Per \quad k=2 & \longrightarrow & 7x=0 & \longrightarrow & x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C(0\,;2)$$

4. Determiniamo il movimento delle rette del fascio al variare del parametro k, mediante la rappresentazione grafica di alcune sue rette.

Dall'esame del grafico di queste rette si deduce che:

Il parametro k assume valori positivi, crescenti da 0 a $+\infty$, quando le rette del fascio, ruotano in senso antiorario attorno al centro C, passando dalla posizione della prima generatrice $(k=0)$ alla posizione della seconda generatrice $(k=+\infty)$.



Esercizio 231.521

Scrivi l'equazione del fascio generato dalle rette di equazioni: $3x+2y-1=0$ e $6x+4y+3=0$, stabilisci se è proprio o improprio e determina l'equazione della retta del fascio che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1.

Soluzione

L'equazione del fascio è: $3x+2y-1+k\cdot(6x+4y+3)=0$

Determiniamo il coefficiente angolare, riscrivendo il fascio in forma implicita:

$3x+2y-1+6kx+4ky+3k=0$;

$(3+6k)x+(2+4k)y+3k-1=0$.

$$m=-\frac{a}{b}=-\frac{3+6k}{2+4k}=-\frac{3(1+2k)}{2(1+2k)}=-\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y=-\frac{3}{2}x-\frac{3k-1}{2+4k}$$

Essendo il coefficiente angolare non dipendente dal parametro k, il fascio è improprio.

L'equazione della retta del fascio che interseca l'asse y nel punto di ordinata 1 si ottiene sostituendo le coordinate del punto $(0\,;1)$, oppure imponendo che l'ordinata all'origine sia uguale a 1.

$$q=1\,; \qquad -\frac{3k-1}{2+4k}=1\,; \qquad -3k+1=2+4k\,; \qquad 7k=-1\,; \qquad k=-\frac{1}{7} \qquad \Rightarrow$$

$$y=-\frac{3}{2}x-\frac{3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)-1}{2+4\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)}\,; \qquad y=-\frac{3}{2}x-\frac{-\frac{3}{7}-1}{2-\frac{4}{7}}\,; \qquad y=-\frac{3}{2}x-\frac{-\frac{10}{7}}{\frac{10}{7}}\,;$$

$$y=-\frac{3}{2}x+1\,.$$

Esercizio 231.523

Dopo aver scritto l'equazione del fascio generato dalle rette di equazioni: $3x-2y+4=0$ e $2x+y-2=0$, stabilisci se è proprio o improprio e determina l'equazione della retta del fascio parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Soluzione

L'equazione del fascio è: $3x-2y+4+k(2x+y-2)=0$

Determiniamo il coefficiente angolare, riscrivendo il fascio in forma implicita:

$3x-3y+4+2kx+ky-2k=0$;

$(3+2k)x+(k-2)y+2(2-k)=0$.

$m=-\frac{a}{b}=-\frac{k-2}{3+2k}$. Essendo il coefficiente angolare dipendente dal parametro k, il fascio è proprio.

L'equazione della retta del fascio parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante si ottiene imponedo che il coefficiente sia uguale a 1.

$$-\frac{3+2k}{k-2}=1\,; \qquad -3-2k=k-2\,; \qquad 3k=-1\,; \qquad k=-\frac{1}{3}\,.$$

Sostituendo tale valore nel fascio si ha:

$$3x-2y+4-\frac{1}{3}\cdot(2x+y-2)=0\,; \qquad 9x-6y+12-2x-y+2=0\,;$$

$$7x-7y+14=0\,; \qquad x-y+2=0$$

Esercizio 232.529

Studiare il fascio di rette: $kx - (k-2)y + 4k - 6 = 0$.

Soluzione

1. Determiniamo le rette generatrici del fascio, riscrivendo il fascio come combinazione lineare:

$$kx - ky + 2y + 4k - 6 = 0\,; \qquad 2y - 6 + k(x - y + 4) = 0$$

Per $k = 0$ $\longrightarrow$ $2y - 6 = 0$ (I^{a} retta generatrice)

Per nessun valore di k $(k = \infty)$ $\longrightarrow$ $x - y + 4 = 0$ (II^{a} retta generatrice)

2. Determiniamo il coefficiente angolare:

$m = -\frac{a}{b} = -\frac{k}{-(k-2)} = \frac{k}{k-2}$. Essendo il coefficiente angolare dipendente dal parametro k, il fascio è proprio.

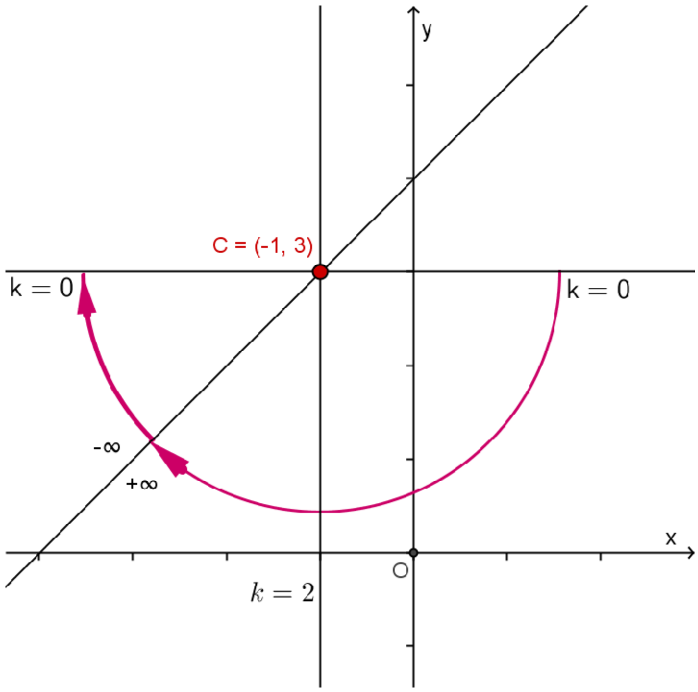
3. Determiniamo le coordinate del centro del fascio, annullando i coefficienti delle due incognite:

$$\left.\begin{array}{lllll} Per\ \ k = 0 & \longrightarrow & 2y - 6 = 0 & \longrightarrow & y = 3 \\ Per\ \ k = 2 & \longrightarrow & 2x + 8 - 6 = 0 & \longrightarrow & x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ C(-1\,;3)$$

4. Determiniamo il movimento delle rette del fascio al variare del parametro k, mediante la rappresentazione grafica di alcune sue rette.

Dall'esame del grafico di queste rette si deduce che:

Il parametro k assume valori positivi, crescenti da 0 a $+\infty$, quando le rette del fascio, ruotano in senso orario attorno al centro C, passando dalla posizione della prima generatrice $(k = 0)$ alla posizione della seconda generatrice $(k = +\infty)$.



Esercizio 235.553

A. Studia il fascio di rette: $(k+2)x-(1-2k)y+5=0$, indicando con a la retta del fascio che non viene rappresentata da alcun valore di k.
B. Determina la retta r del fascio che interseca l'asse y nel punto avente per ordinata la soluzione positiva dell'equazione $t^4-4t^2=0$
C. Individua la retta s del fascio di equazione $x+(k+1)y-3+k=0$ perpendicolare alla retta r.
D. Calcola l'area del quadrilatero individuato dalle due rette r ed s, a e dalla retta b del secondo fascio che non coorrisponde ad alcun valore di k.

Soluzione A

1. Determiniamo le rette generatrici del fascio, riscrivendo il fascio come combinazione lineare:

$kx+2x-y+2ky+5=0\,;\qquad 2x-y+5+k(x+2y)=0$

Per $k=0 \quad\longrightarrow\quad 2x-y+5=0$ (I^a retta generatrice)

Per nessun valore di k $(k\longrightarrow\infty) \quad\longrightarrow\quad x+2y=0$ (II^a retta generatrice) **retta a**

2. Determiniamo la natura del fascio, verificando la condizione di parallelismo delle rette del fascio:

$ab'-a'b=2\cdot 2-1\cdot(-1)=5\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad$ rette non parallele $\quad\Leftrightarrow\quad$ Fascio proprio.

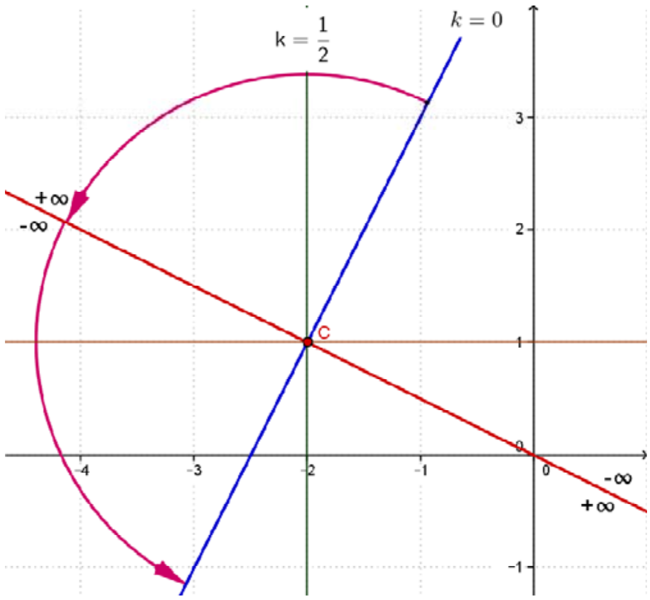
3. Determiniamo le coordinate del centro del fascio, annullando i coefficienti delle due incognite:

$$\left.\begin{array}{lll} Per\ \ k=\frac{1}{2} & \longrightarrow\ \frac{5}{2}x+5=0 & \longrightarrow\ x+2=0 \\ Per\ \ k=-2 & \longrightarrow\ -5y+5=0 & \longrightarrow\ y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ C(-2\,;\,1)$$

4. Determiniamo il movimento delle rette del fascio al variare del parametro k, mediante la rappresentazione grafica di alcune sue rette.

Dall'esame del grafico di queste rette si deduce che:

Il parametro k assume valori positivi, crescenti da 0 a $+\infty$, quando le rette del fascio, ruotano in senso antiorario attorno al centro C, passando dalla posizione della prima generatrice $(k=0)$ alla posizione della seconda generatrice $(k=+\infty)$.



Soluzione B

$t^4-4t^2=0\,;\qquad t^2\cdot(t^2-4)=0\,;$

$t^2=0 \qquad t=0\ (doppia)$
$t^2-4=0 \qquad t=\mp 2 \qquad\Rightarrow\qquad P(0\,;2)$

$(k+2)\cdot 0-(1-2k)\cdot 2+5=0\,;\qquad -2+4k+5=0\,;\qquad 4k=-3\,;\qquad k=-\frac{3}{4}.$

Sostituendo nel fascio si ha:

$\left(-\frac{3}{4}+2\right)x-\left[1-2\left(-\frac{3}{4}\right)\right]y+5=0\,;\qquad \frac{5}{4}x-\frac{5}{2}y+5=0\,;\qquad 5x-10y+20=0\,;$

$x-2y+4=0\quad(r)\,.$

Soluzione C

La condizione di perpendicolarità fra rette è: $aa'+bb'=0$.

$1\cdot 1+(k+1)\cdot(-2)=0\,;\qquad 1-2k-2=0\,;\qquad 2k=-1\,;\qquad k=-\frac{1}{2}$

Sostituendo nel fascio si ha:

$x+\left(-\frac{1}{2}+1\right)y-3-\frac{1}{2}=0\,;\qquad x+\frac{1}{2}y-\frac{7}{2}=0\,;\qquad 2x+y-7=0\quad(s)$

Soluzione D

Il secondo fascio $x + (k+1)y - 3 + k = 0$ riscritto come combinazione lineare delle rette generatrici è:

$x + ky + y - 3 + k = 0$; $\quad\quad$ $x + y - 3 + k(y+1) = 0$

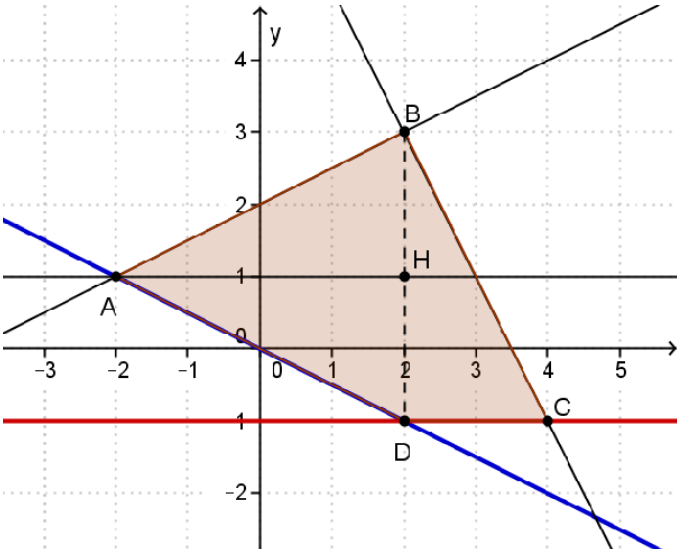
La retta b del secondo fascio che non coorrisponde ad alcun valore di k è: $y + 1 = 0 \quad (b)$.

Il quadrilatero individuato dalle due rette r ed s, a e dalla retta b del secondo fascio che non coorrisponde ad alcun valore di k è disegnato a lato.

$A(-2\,;1) \quad B(2\,;3) \quad C(4\,;-1) \quad D(2\,;-1)$

$S_{ABCD} = s_{ABD} + s_{BCD} = \frac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{AH} + \frac{1}{2}\overline{DC}\cdot\overline{BD} =$

$= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 8 + 4 = 12\,.$



Prova scritta 2008

Assegnato il fascio di rette di equazione $\mathfrak{F}:\ (3k+2)x+(2k-1)y-8k=0$ determinare:

1. la natura del fascio
2. le rette generatrici r ed s
3. il centro del fascio
4. il verso di orientamento del fascio
5. la retta v del fascio passante per il punto $P(3,4)$
6. la retta w del fascio perpendicolare alla retta $u:\ 3x+y-2=0$
7. la retta j del fascio parallela alla retta passante per $Q(3,1)$ e $R(-5,3)$
8. l'area del triangolo ABC, con il punto $A=r\cap t$ e con il punto $B=s\cap t$, dove $t:\ 5x-2y+8=0$
9. Il baricentro del triangolo ABC
10. la lunghezza della mediana passante per il vertice B
11. l'equazione della mediana passante per il vertice B

Punto 1

Essendo il c.a.$(\mathfrak{F}) = -\dfrac{3k+2}{2k-1}$, dipendente dal parametro k, le rette del fascio variano la loro direzione al variare del parametro k . Si tratta pertanto di un fascio di rette proprio.

Punto 2

Per $k=0 \quad \rightarrow \quad 2x-y=0 \quad$ (retta r)

Per $k=ind \quad \rightarrow \quad 3x+2y-8=0 \quad$ (retta s)

Punto 3

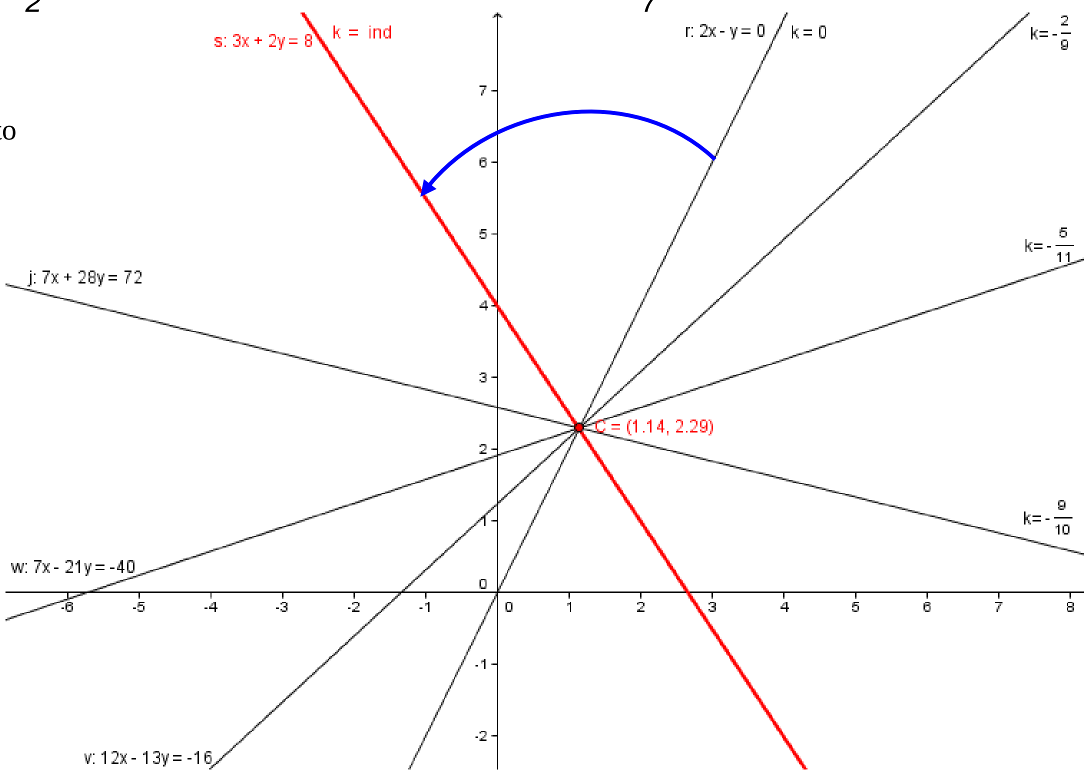
Per $k=-\dfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad -\dfrac{7}{3}y+\dfrac{16}{3}=0 \qquad -7y+16=0 \qquad y=\dfrac{16}{7}\cong 2{,}3$

Per $k=\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \dfrac{7}{2}x-4=0 \qquad 7x-8=0 \qquad x=\dfrac{8}{7}\cong 1{,}1$

$\Rightarrow C\left(\dfrac{8}{7},\dfrac{16}{7}\right)$

Punto 4

Il verso di orientamento del fascio è antiorario.



Punto 5

$P \in \mathscr{F} \quad \rightarrow \quad (3k+2)\cdot 3 + (2k-1)\cdot 4 - 8k = 0 \quad 9k+6+8k-4-8k=0 \quad 9k=-2 \quad k=-\frac{2}{9}$.

Pertanto la retta richiesta ha equazione: $\left[3\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+2\right]x + \left[2\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)-1\right]y - 8\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)=0$

$\frac{4}{3}x - \frac{13}{9}y + \frac{16}{9} = 0 \qquad 12x - 13y + 16 = 0$.

Punto 6

Il c.a.(u) = -3

c.a.(F) · c.a.(u) = $-1 \qquad -\frac{3k+2}{2k-1}\cdot(-3) = -1 \qquad 9k+6=-2k+1 \qquad 11k=-5 \qquad k=-\frac{5}{11}$

$\rightarrow \quad 7x - 21y + 40 = 0$

Infatti: $\left[3\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)+2\right]x + \left[2\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)-1\right]y - 8\cdot\left(-\frac{5}{11}\right)=0 \qquad \frac{7}{11}x - \frac{21}{11}y + \frac{40}{11} = 0 \;\; 7x - 21y + 40 = 0$

$\rightarrow$ c.a. $= -\frac{7}{-21} = \frac{1}{3}$.

Punto 7

Il c.a.$(QR) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{-5-3} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$

c.a.(F) = c.a. $(qr) \quad \rightarrow \quad -\frac{3k+2}{2k-1} = -\frac{1}{4} \qquad 12k+8=2k-1 \qquad 12k-2k=-8-1 \qquad 10k=-9 \qquad k=-\frac{9}{10}$

$\rightarrow \quad 7x + 28y - 72 = 0$

Infatti: $\left[3\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)+2\right]x + \left[2\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)-1\right]y - 8\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)=0 \qquad -\frac{7}{10}x - \frac{14}{5}y + \frac{72}{10} = 0$

$7x + 28y - 72 = 0 \quad \rightarrow$ c.a. $= -\frac{7}{28} = -\frac{1}{4}$.

Punto 8

Il punto A si ottiene risolvendo il sistema: $\begin{cases} t \\ r \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-2y+8=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

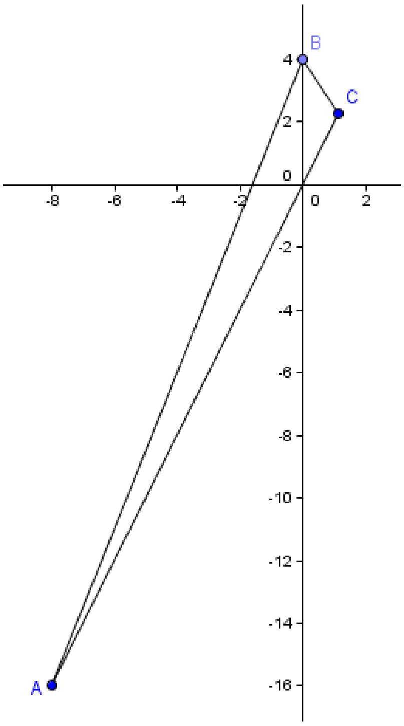
$\begin{cases} 5x-2y+8=0 \\ y=2x \end{cases}$

$\begin{cases} 5x-2\cdot 2x+8=0 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x=-8 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x=-8 \\ y=2\cdot(-8) \end{cases} \quad \begin{cases} x=-8 \\ y=-16 \end{cases} \Rightarrow A(-8,-16)$

Il punto B si ottiene risolvendo il sistema: $\begin{cases} t \\ s \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-2y+8=0 \\ 3x+2y-8=0 \end{cases}$

sommando membro a membro si ha:

$\begin{cases} 5x+3x=0 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} 8x=0 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ 2y-8=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow B(0,4)$



L'area del triangolo è data da: $S = \frac{1}{2} det(M)$, dove $det(M) = \begin{pmatrix} -8 & -16 & 1 \\ \frac{8}{7} & \frac{16}{7} & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -8 & -16 \\ \frac{8}{7} & \frac{16}{7} \\ 0 & 4 \end{matrix} =$

$$= -\frac{128}{7} + 0 + \frac{32}{7} - 0 + 32 + \frac{128}{7} = \frac{32 + 224}{7} = \frac{256}{7}$$

$$\Rightarrow \ S = \frac{1}{2} det(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{256}{7} = \frac{128}{7} .$$

Punto 9

Il baricentro è dato da:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-8 + \frac{8}{7} + 0}{3} = \frac{\frac{-56+8}{7} + 0}{3} = -\frac{48}{21} = -\frac{16}{7}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-16 + 4 + \frac{16}{7}}{3} = \frac{\frac{-112 + 28 + 16}{7}}{3} = -\frac{68}{21}$$

Punto 10

Il punto medio N del lato AC ha coordinate: $A(-8, -16) \Rightarrow \ C\left(\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-8 + \frac{8}{7}}{2} = \frac{\frac{-56+8}{7}}{2} = -\frac{48}{14} = -\frac{24}{7}$$

$$y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-16 + \frac{16}{7}}{2} = \frac{\frac{-112 + 16}{7}}{2} = -\frac{96}{14} = -\frac{48}{7}$$

La mediana $BN = \sqrt{(x_B - x_H)^2 + (y_B - y_H)^2} = \sqrt{\left(0 + \frac{24}{7}\right)^2 + \left(4 + \frac{48}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{49} + \left(\frac{28+48}{7}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{576}{49} + \left(\frac{76}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{576}{49} + \frac{5776}{49}} = \sqrt{\frac{6352}{49}} = \frac{4}{7}\sqrt{397} .$$

Punto 11

l'equazione della mediana BN ha equazione:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 0 & 4 \\ -\frac{24}{7} & -\frac{48}{7} \end{matrix} = 0 \qquad 4x - \frac{24}{7}y + \frac{96}{7} + \frac{48}{7}x = 0 \qquad 28x - 24y + 96 + 48x = 0$$

$$76x - 24y + 96 = 0 \qquad 19x - 6y + 24 = 0 .$$