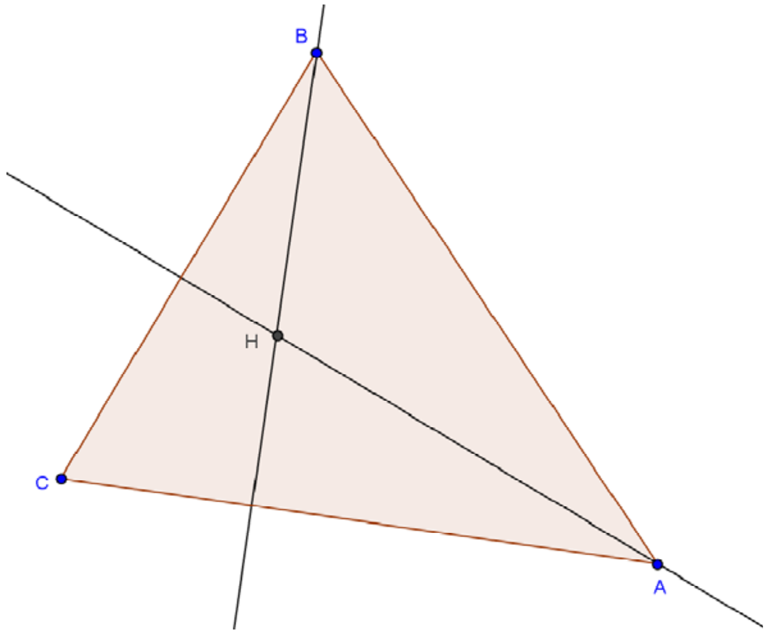
Esercizio 226.472

Determina il terzo vertice A di un triangolo di cui sono noti due vertici $B(3;-1)$, $C(-1;-3)$ e l'ortocentro $H\left(\frac{21}{4};\frac{3}{4}\right)$.



Soluzione 1

Analizziamo il problema ragionando, per semplicità, su un triangolo acutangolo.

L'ortocentro H è il punto di incontro delle tre altezze.

Determiniamo prima l'equazione dell'altezza AH:

$$m_{BC}=\frac{-1+3}{3+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad m_{AH}=-2$$

$$AH:\quad y-\frac{3}{4}=-2\left(x-\frac{21}{4}\right) \qquad \dots \qquad y=-2x+\frac{45}{4}$$

Il vertice A ha quindi coordinate $A\left(k;\ -2k+\frac{45}{4}\right)$

Determiniamo poi l'equazione dell'altezza BH:

$$m_{AC}=\frac{-2k+\frac{45}{4}+3}{k+1}=\frac{-2k+\frac{57}{4}}{k+1} \qquad \Rightarrow \qquad m_{BH}=\frac{k+1}{2k-\frac{57}{4}}=\frac{k+1}{\frac{8k-57}{4}}=\frac{4(k+1)}{8k-57}$$

BH :

$$y-\frac{3}{4}=\frac{4(k+1)}{8k-57}\left(x-\frac{21}{4}\right) \qquad y-\frac{3}{4}=\frac{4(k+1)}{8k-57}x-\frac{4(k+1)}{8k-57}\cdot\frac{21}{4}$$

$$y=\frac{4(k+1)}{8k-57}x+\frac{3}{4}-\frac{21(k+1)}{8k-57} \qquad y=\frac{4(k+1)}{8k-57}x+\frac{3(8k-57)-4\cdot 21(k+1)}{4(8k-57)}$$

$$y=\frac{4(k+1)}{8k-57}x+\frac{24k-171-84k-84}{4(8k-57)} \qquad y=\frac{4(k+1)}{8k-57}x+\frac{-60k-255}{4(8k-57)}$$

Non avendo sfruttato le coordinate del punto B nel determinare l'equazione della retta BH, possiamo utilizzare questo dato per ricavare il valore di k richiesto, imponendo il passaggio della retta BH per il punto B:

$$-1=\frac{4(k+1)}{8k-57}\cdot 3+\frac{-60k-255}{4(8k-57)} \qquad -1=\frac{12(k+1)}{8k-57}+\frac{-60k-255}{4(8k-57)}$$

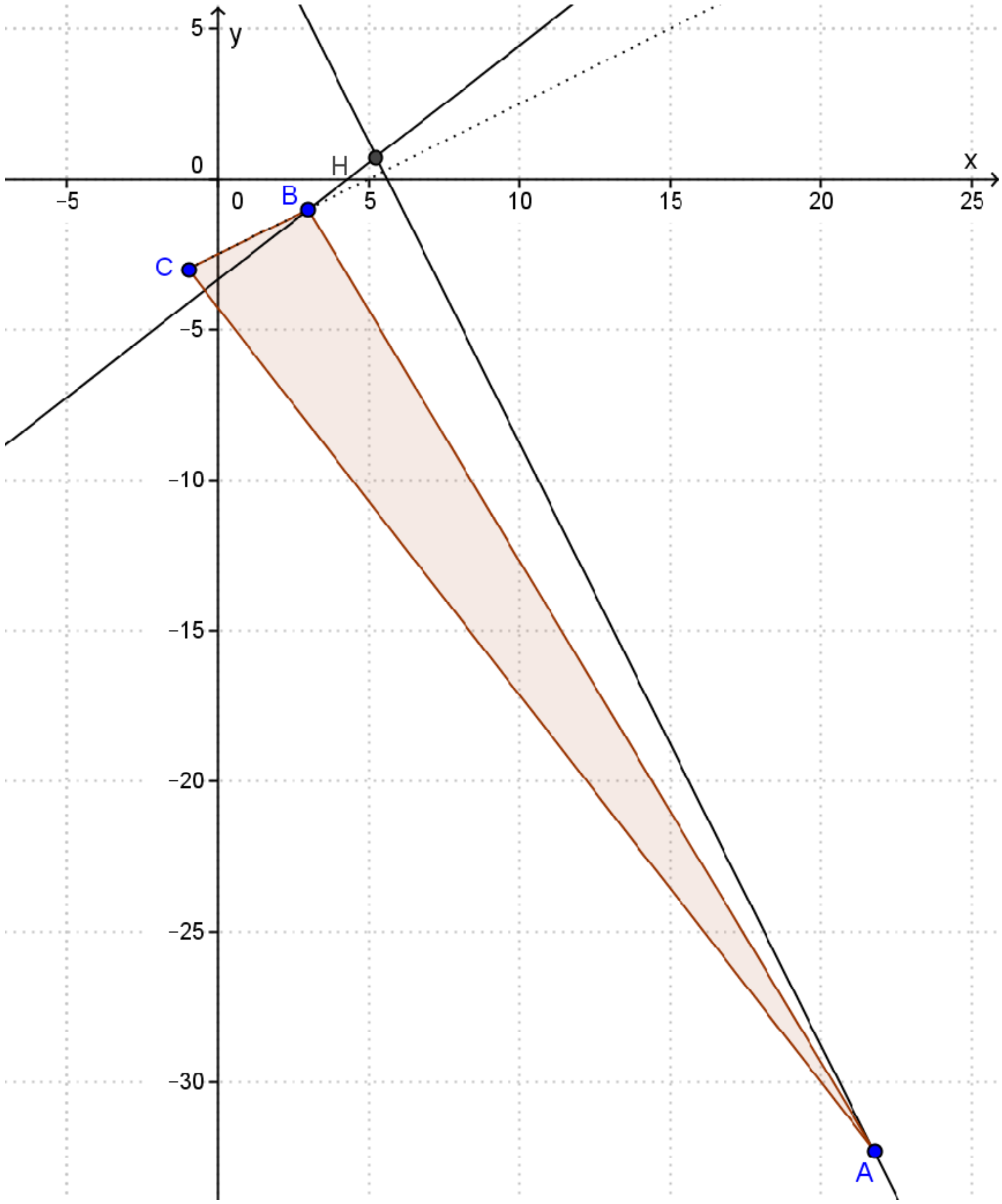
$$-4(8k-57)=4\cdot 12(k+1)-60k-255 \qquad -32k+228=48k+48-60k-255$$

$$20k=435 \qquad k=\frac{435}{20}=\frac{87}{4}$$

In definitiva le coordinate del punto A sono:

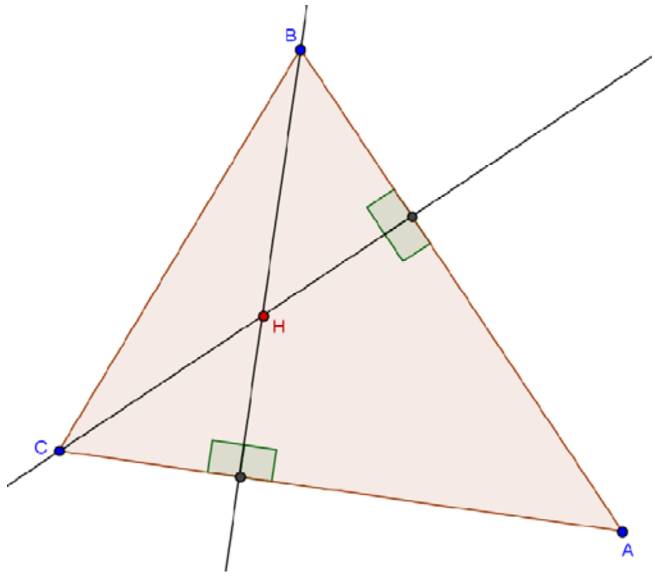
$$x_A=k=\frac{87}{4} \qquad e \qquad y_A=-2k+\frac{45}{4}=-2\cdot\frac{87}{4}+\frac{45}{4}=-\frac{174}{4}+\frac{45}{4}=-\frac{129}{4}$$

Il grafico reale del problema è sotto rappresentato:



Esercizio 226.472

Determina il terzo vertice A di un triangolo di cui sono noti due vertici $B(3;-1)$, $C(-1;-3)$ e l'ortocentro $H\left(\frac{21}{4};\frac{3}{4}\right)$.



Soluzione 2

Analizziamo il problema ragionando, per semplicità, su un triangolo acutangolo.

L'ortocentro H è il punto di incontro delle tre altezze.

Le coordinate del punto A si possono ottenere come intersezione dei due lati AB e AC.

Determiniamo prima il coefficiente angolare dell'altezza BH:

$$m_{BH}=\frac{\frac{3}{4}+1}{\frac{21}{4}-3}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{9}=\frac{7}{9}\qquad\Rightarrow\qquad m_{AC}=-\frac{9}{7}$$

Determiniamo poi l'equazione del lato AC:

$$y+3=-\frac{9}{7}(x+1)\qquad\qquad y+3=-\frac{9}{7}x-\frac{9}{7}$$

$$y=-\frac{9}{7}x-\frac{9}{7}-3\qquad\qquad y=-\frac{9}{7}x-\frac{30}{7}$$

Determiniamo prima il coefficiente angolare dell'altezza CH:

$$m_{CH}=\frac{\frac{3}{4}+3}{\frac{21}{4}+1}=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{25}{4}}=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{25}=\frac{3}{5}\qquad\Rightarrow\qquad m_{AB}=-\frac{5}{3}$$

Determiniamo poi l'equazione del lato AB:

$$y+1=-\frac{5}{3}(x-3)\qquad\qquad y+1=-\frac{5}{3}x+5\qquad\qquad y=-\frac{5}{3}x+4\ .$$

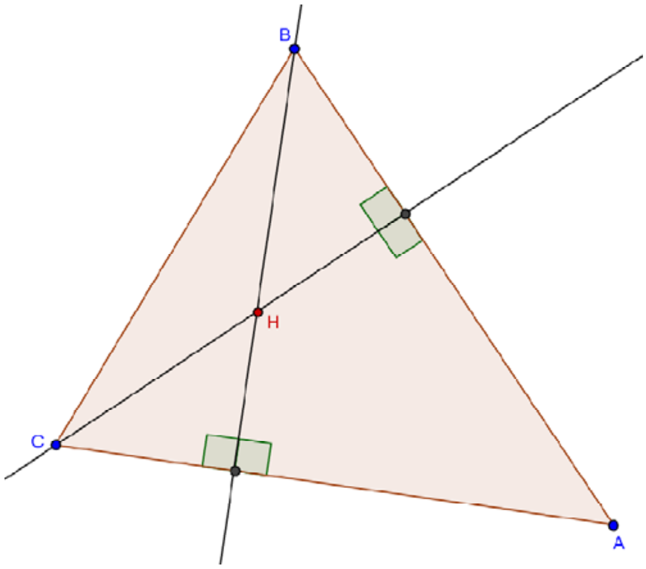
Le coordinate del punto A sono date dall'intersezione delle due rette AB ed AC.

$$\begin{cases}y=-\frac{5}{3}x+4\\ y=-\frac{9}{7}x-\frac{30}{7}\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}-\frac{9}{7}x-\frac{30}{7}=-\frac{5}{3}x+4\\ \end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}-27x-90=-35x+84\\ \end{cases}$$

$$\begin{cases}8x=174\\ \end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}x=\frac{174}{8}=\frac{87}{4}\\ y=-\frac{5}{3}\cdot\frac{174}{8}+4=-\frac{870}{24}+4=-\frac{870+96}{24}=-\frac{774}{24}=-\frac{129}{4}\end{cases}$$

Esercizio 226.472

Determina il terzo vertice A di un triangolo di cui sono noti due vertici $B(3;-1)$, $C(-1;-3)$ e l'ortocentro $H\left(\frac{21}{4};\frac{3}{4}\right)$.



Soluzione 3

Siano $(h;\ k)$ le coordinate del punto A . Determiniamo le coordinate dell'ortocentro in funzione di queste coordinate.

Determiniamo l'equazione dell'altezza BH:

$$m_{AC}=\frac{k+3}{h+1}\qquad\Rightarrow\qquad m_{BH}=-\frac{h+1}{k+3}$$

$$y+1=-\frac{h+1}{k+3}(x-3)$$

$$y+1=-\frac{h+1}{k+3}x+3\frac{h+1}{k+3}$$

$$y=-\frac{h+1}{k+3}x+3\frac{h+1}{k+3}-1\qquad y=-\frac{h+1}{k+3}x+\frac{3h+3-k-3}{k+3}\qquad y=-\frac{h+1}{k+3}x+\frac{3h-k}{k+3}$$

L'altezza BH passa per $H\left(\frac{21}{4};\frac{3}{4}\right)$. Pertanto, imponendo il passaggio per tale punto si ha:

$$\frac{3}{4}=-\frac{h+1}{k+3}\cdot\frac{21}{4}+\frac{3h-k}{k+3}\qquad \frac{3}{4}=-\frac{21(h+1)}{4(k+3)}+\frac{3h-k}{k+3}\qquad 3k+9=-21h-21+12h-4k$$

$$9h+7k=-30$$

Determiniamo l'equazione dell'altezza CH:

$$m_{AB}=\frac{k+1}{h-3}\qquad\Rightarrow\qquad m_{CH}=-\frac{h-3}{k+1}=\frac{3-h}{k+1}$$

$$y+3=\frac{3-h}{k+1}(x+1)\qquad y+3=\frac{3-h}{k+1}x+\frac{3-h}{k+1}$$

$$y=\frac{3-h}{k+1}x+\frac{3-h}{k+1}-3\qquad y=\frac{3-h}{k+1}x+\frac{3-h-3k-3}{k+1}$$

$$y=\frac{3-h}{k+1}x+\frac{-h-3k}{k+1}$$

L'altezza CH passa per $H\left(\frac{21}{4};\frac{3}{4}\right)$. Pertanto, imponendo il passaggio per tale punto si ha:

$$\frac{3}{4}=\frac{3-h}{k+1}\cdot\frac{21}{4}+\frac{-h-3k}{k+1}\qquad \frac{3}{4}=\frac{21(3-h)}{4(k+1)}+\frac{-h-3k}{k+1}\qquad 3k+3=63-21h-4h-12k$$

$$25h+15k=60\qquad 5h+3k=12$$

Risolvendo il sistema fra le due relazioni ottenute si ha:

$$\begin{cases}9h+7k=-30\\5h+3k=12\end{cases}$$

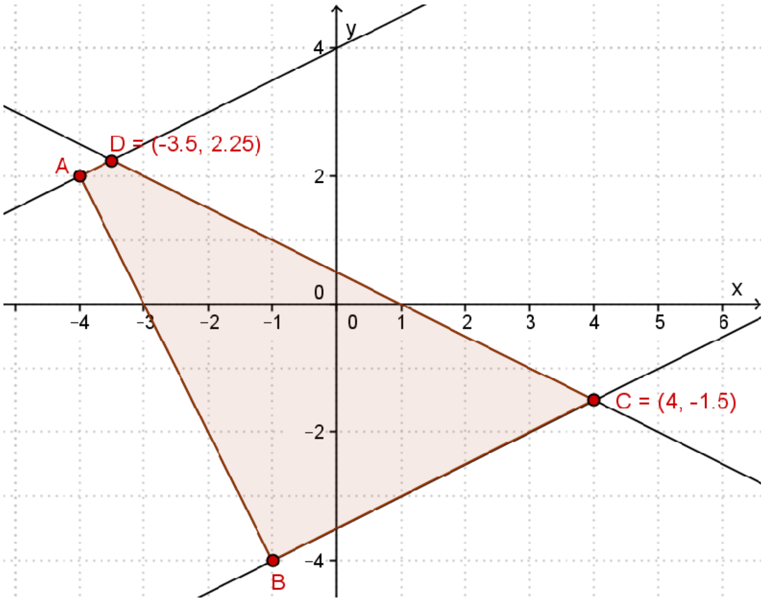
$$D=\begin{vmatrix}9&7\\5&3\end{vmatrix}=27-35=-8$$

$$D_h=\begin{vmatrix}-30&7\\12&3\end{vmatrix}=-90-84=-174\qquad D_k=\begin{vmatrix}9&-30\\5&12\end{vmatrix}=108+150=258$$

$$\left(h=\frac{D_h}{D}=\frac{-174}{-8}=\frac{87}{4}\quad;\quad k=\frac{D_k}{D}=\frac{258}{-8}=-\frac{129}{4}\right)$$

Esercizio 226.473

Dati i punti $A(-4;2)$, $B(-1;\ -4)$ e la retta r di equazione $x+2y-1=0$, determina su r i punti C e D tali che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio rettangolo in A e in B. Calcola poi l'area di $ABCD$.



Soluzione

Il coefficiente angolare della retta AB è:

$$m_{AB}=\frac{2+4}{-4+1}=-2 \quad \Rightarrow$$

$$m_{AD}=\frac{1}{2} \qquad e \qquad m_{BC}=\frac{1}{2}$$

L'equazione della retta AD è:

$$y-y_A=m_{AD}(x-x_A)\,; \qquad y-2=\frac{1}{2}(x+4)$$

$$y-2=\frac{1}{2}x+2\,; \qquad y=\frac{1}{2}x+4$$

L'equazione della retta BC è:

$$y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\,; \qquad y+4=\frac{1}{2}(x+1)$$

$$y+4=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\,; \qquad y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$$

Le coordinate del punto C sono:

$$\begin{cases} BC \\ CD \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2} \\ x+2y-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x+2\left(\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}\right)-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x+x-7-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2x=8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Le coordinate del punto D sono:

$$\begin{cases} AD \\ CD \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{1}{2}x+4 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x+2\left(\frac{1}{2}x+4\right)-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x+x+8-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2x=-7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{7}{2} \\ y=+\frac{9}{4} \end{cases}$$

La misura del lato AB è:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-4+1)^2+(2+4)^2}=\sqrt{(-3)^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

La misura del lato AB è:

$$\overline{BC}=\sqrt{(-1-4)^2+\left(-4+\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{(-5)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{25+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{100+25}{4}}=\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{5}$$

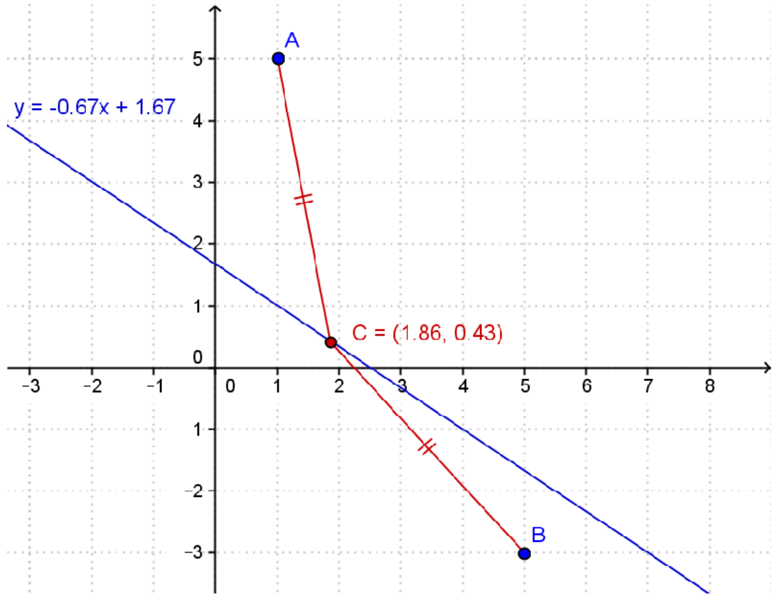
La misura del lato AB è:

$$\overline{AD}=\sqrt{\left(-4+\frac{7}{2}\right)^2+\left(2-\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{4+1}{16}}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{5}$$

Pertanto l'area del trapezio $ABCD$ è:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5}\right)\cdot 3\sqrt{5}=\frac{3}{2}\cdot\frac{11}{4}\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\frac{165}{8}.$$

Esercizio 226.474



Dati i punti $A(1;5)$, $B(5;-3)$ e la retta r di equazione $2x+3y-5=0$:

a. determina un punto C su r equidistante da A e B;
b. determina un punto D in modo che il quadrilatero $ACBD$ sia un parallelogramma;
c. calcola l'area di $ACBD$.

Soluzione 1.a

La forma esplicita della retta r è $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

Un punto qualsiasi della retta r ha coordinate $C\left(k;\ -\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}\right)$.

Imponiamo che tale punto sia equidistante dai punti A e B.

$\overline{AC}=\overline{BC}$; $\quad \sqrt{(k-1)^2+\left(-\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}-5\right)^2}=\sqrt{(k-5)^2+\left(-\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}+3\right)^2}$

$$\begin{cases} (k-1)^2+\left(-\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}-5\right)^2\geq 0 \\ (k-5)^2+\left(-\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}+3\right)^2\geq 0 \\ \left(\sqrt{(k-1)^2+\left(-\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}-5\right)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(k-5)^2+\left(-\frac{2}{3}k+\frac{5}{3}+3\right)^2}\right)^2 \end{cases}$$

Essendo i due radicandi positivi $\forall k\in R\geq 0$ perché somma di quadrati, è sufficiente risolvere solo l'equazione:

$$(k-1)^2+\left(-\frac{2}{3}k-\frac{10}{3}\right)^2=(k-5)^2+\left(-\frac{2}{3}k+\frac{14}{3}\right)^2$$

$$k^2+1-2k+\frac{4}{9}k^2+\frac{100}{9}+\frac{40}{9}k=k^2+25-10k+\frac{4}{9}k^2+\frac{196}{9}-\frac{56}{9}k$$

$$9k^2+9-18k+4k^2+100+40k=9k^2+225-90k+4k^2+196-56k$$

$$168k=312 \qquad k=\frac{312}{168}=\frac{13}{7}.$$

Soluzione 2.a

Un punto qualsiasi della retta r ha coordinate $C(h;\ k)$.

Imponiamo che tale punto sia equidistante dai punti A e B.

$\overline{AC}=\overline{BC}$; $\quad \sqrt{(h-1)^2+(k-5)^2}=\sqrt{(h-5)^2+(k+3)^2}$

$$\begin{cases} (h-1)^2+(k-5)^2\geq 0 \\ (h-5)^2+(k+3)^2\geq 0 \\ \left(\sqrt{(h-1)^2+(k-5)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(h-5)^2+(k+3)^2}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall h,k\in R\geq 0 \\ \forall h,k\in R\geq 0 \\ (h-1)^2+(k-5)^2=(h-5)^2+(k+3)^2 \end{cases}$$

$$(h-1)^2+(k-5)^2=(h-5)^2+(k+3)^2$$

$$h^2+1-2h+k^2+25-10k=h^2+25-10h+k^2+9+6k$$

$$1-2h-10k=-10h+9+6k \qquad 8h-16k-8=0$$

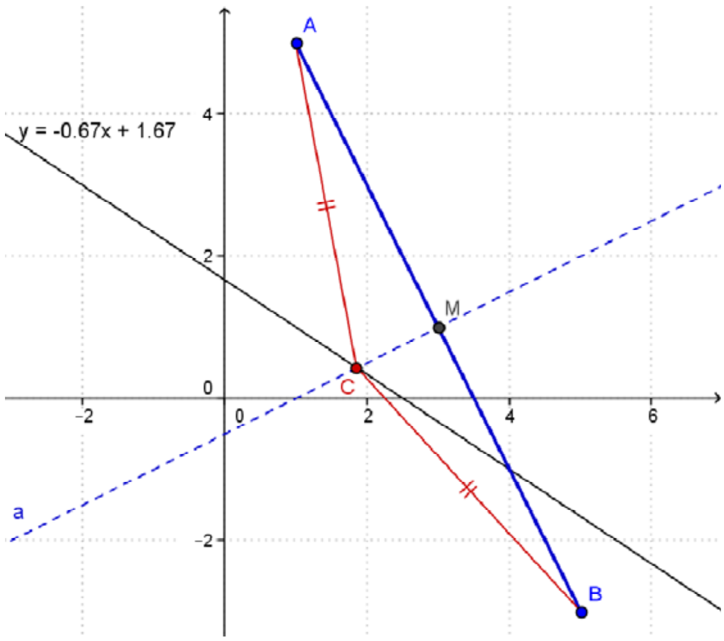
$$h-2k-1=0 \qquad k=\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}$$

Pertanto il punto C ha coordinate $C\left(h; \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}\right)$

Imponendo l'appartenenza alla retta r $\quad 2x + 3y - 5 = 0$ si ha:

$2h + 3\left(\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}\right) - 5 = 0 \qquad 2h + \frac{3}{2}h - \frac{3}{2} - 5 = 0 \qquad 4h + 3h - 3 - 10 = 0$

$7h = 13 \qquad h = \dfrac{13}{7} \qquad k = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{13}{7} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{14} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{14} = \dfrac{3}{7}.$



Soluzione 3.a

Il punto C si può ottenere come intersezione fra l'asse del segmento AB e la retta r.

L'asse del segmento AB è dato da: $\overline{PA} = \overline{PB}$ cioè:

$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$

Essendo i due radicandi positivi $\forall x \in R \geq 0$ perché somma di quadrati, è sufficiente risolvere l'equazione, elevando ambo i membri al quadrato:

$\left(\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}\right)^2$

$$\boxed{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2}$$

Equazione dell'asse del segmento AB

Sostituendo le coordinate dei punti A e B si ottiene:

$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = (x - 5)^2 + (y + 3)^2$

$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 25 - 10y = x^2 + 25 - 10x + y^2 + 9 + 6y$

$8x - 16y = 8$

$x - 2y = 1$

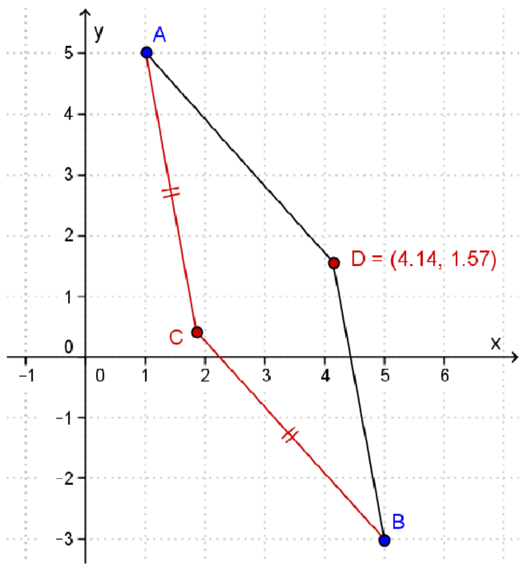
Il punto C si ottiene risolvendo il sistema:

$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2(2y + 1) + 3y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 4y + 2 + 3y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 7y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} - \\ y = \dfrac{3}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \cdot \dfrac{3}{7} + 1 = \dfrac{6}{7} + 1 = \dfrac{13}{7} \\ y = \dfrac{3}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{13}{7} \\ y = \dfrac{3}{7} \end{cases}$

Soluzione 1.b

Le coordinate del punto D si possono ottenere, in maniera semplice, con le formule:



$x_A + x_B = x_C + x_D \qquad 1 + 5 = \dfrac{13}{7} + x_D$

$y_A + y_B = y_C + y_D \qquad 5 - 3 = \dfrac{3}{7} + y_D$

$x_D = 1 + 5 - \frac{13}{7} = \frac{7+35-13}{7} = \frac{29}{7}$

$y_D = 5 - 3 - \frac{3}{7} = \frac{35-21-3}{7} = \frac{11}{7}$

Soluzione 2.b

Il punto D è il punto di intersezione della retta AD con la retta BD.

Determiniamo l'equazione della retta AD:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-3 - \frac{3}{7}}{5 - \frac{13}{7}} = \frac{-\frac{24}{7}}{\frac{22}{7}} = -\frac{24}{7} \cdot \frac{7}{22} = -\frac{12}{11} \qquad \Longrightarrow \qquad m_{AD} = -\frac{12}{11}$$

l'equazione della retta AD è :

$$y - y_A = m_{AD}(x - x_A)\,; \qquad y - 5 = -\frac{12}{11}(x - 1) \qquad y - 5 = -\frac{12}{11}x + \frac{12}{11} \qquad y = -\frac{12}{11}x + \frac{67}{11}$$

Determiniamo l'equazione della retta BD:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{5 - \frac{3}{7}}{1 - \frac{13}{7}} = \frac{\frac{32}{7}}{-\frac{6}{7}} = \frac{32}{7} \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{16}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad m_{BD} = -\frac{16}{3}$$

l'equazione della retta BD è :

$$y - y_B = m_{BD}(x - x_B)\,; \qquad y + 3 = -\frac{16}{3}(x - 5) \qquad y + 3 = -\frac{16}{3}x + \frac{80}{3} \qquad y = -\frac{16}{3}x + \frac{71}{3}$$

Le coordinate del punto D si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} BD \\ AD \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{16}{3}x + \frac{71}{3} \\ y = -\frac{12}{11}x + \frac{67}{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{12}{11}x + \frac{67}{11} = -\frac{16}{3}x + \frac{71}{3} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} -36x + 201 = -176x + 781 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 140x = 580 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{580}{140} = \frac{29}{7} \\ y = -\frac{12}{11} \cdot \frac{29}{7} + \frac{67}{11} = -\frac{348}{77} + \frac{67}{11} = \frac{-348 + 469}{77} = \frac{121}{77} = \frac{11}{7} \end{cases}$$

Soluzione 1.c

Il quadrilatero $ACBD$ è un rombo.

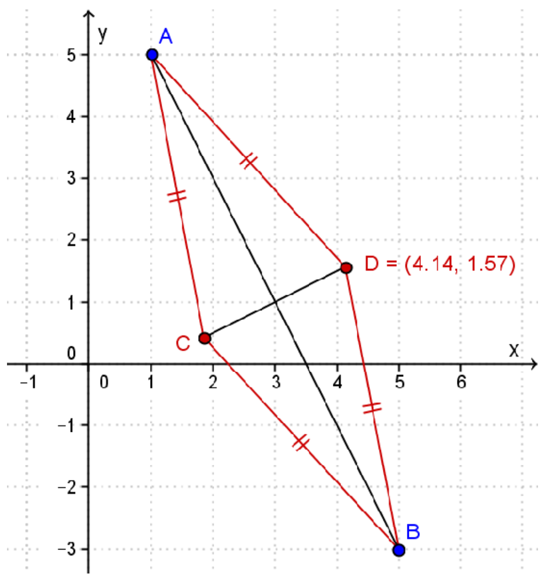
Occorre quindi calcolare le misure delle due diagonali.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (5 + 3)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\,.$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{7} - \frac{29}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7} - \frac{11}{7}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{256}{49} + \frac{64}{49}} = \sqrt{\frac{320}{49}} = \frac{8}{7}\sqrt{5}\,.$$

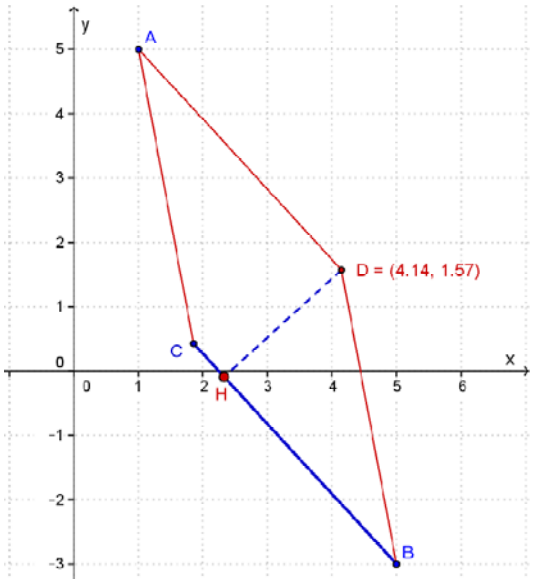


L'area del rombo $ACBD$ è:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{8}{7}\sqrt{5} = \frac{80}{7}\,.$$

Soluzione 2.c

Per determinare l'area del parallelogramma $ACBD$ occorre determinare la misura della base BC e la misura della relativa altezza DH.



$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{\left(5 - \frac{13}{7}\right)^2 + \left(-3 - \frac{3}{7}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{484}{49} + \frac{576}{49}} = \sqrt{\frac{1060}{49}} = \frac{2}{7}\sqrt{265} \ .$$

Per calcolare la misura dell'altezza DH occorre conoscere l'equazione della base BC :

$$\frac{y - y_c}{y_B - y_c} = \frac{x - x_c}{x_B - x_c} \qquad \frac{y - \frac{3}{7}}{-3 - \frac{3}{7}} = \frac{x - \frac{13}{7}}{5 - \frac{13}{7}}$$

$$\frac{y - \frac{3}{7}}{-\frac{24}{7}} = \frac{x - \frac{13}{7}}{\frac{22}{7}} \qquad -\frac{7}{24} \cdot \left(y - \frac{3}{7}\right) = \frac{7}{22} \cdot \left(x - \frac{13}{7}\right)$$

$$-\frac{7}{24}y + \frac{1}{8} = \frac{7}{22}x - \frac{13}{22} \qquad -\frac{7}{24}y = \frac{7}{22}x - \frac{13}{22} - \frac{1}{8}$$

$$-\frac{7}{24}y = \frac{7}{22}x + \frac{-52 - 11}{88} \qquad -\frac{7}{24}y = \frac{7}{22}x - \frac{63}{88} \qquad \frac{7}{24}y = -\frac{7}{22}x + \frac{63}{88}$$

$$y = -\frac{7}{22} \cdot \frac{24}{7}x + \frac{63}{88} \cdot \frac{24}{7} \qquad y = -\frac{12}{11}x + \frac{27}{11} \qquad 12x + 11y - 27 = 0$$

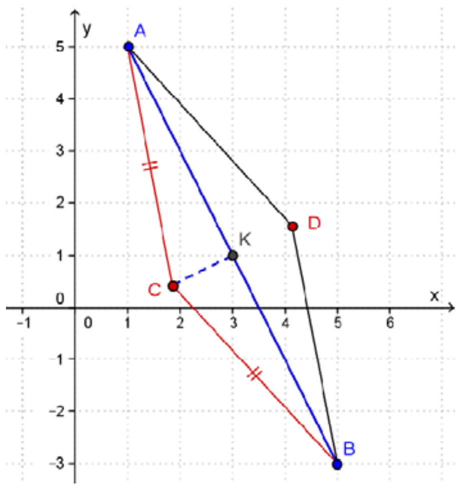
La misura dell'altezza DH è:

$$\overline{DH} = \frac{|ax_D + by_D + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|12 \cdot \frac{29}{7} + 11 \cdot \frac{11}{7} - 27\right|}{\sqrt{12^2 + 11^2}} = \frac{\left|\frac{348}{7} + \frac{121}{7} - 27\right|}{\sqrt{144 + 121}} = \frac{\left|\frac{348 + 121 - 189}{7}\right|}{\sqrt{265}} = \frac{280}{7\sqrt{265}}$$

L'area del parallelogramma $ACBD$ è $S = \overline{BC} \cdot \overline{DH} = \frac{2}{7}\sqrt{265} \cdot \frac{280}{7\sqrt{265}} = \frac{80}{7}$.

Soluzione 3.c

L'area del parallelogramma $ACBD$ è il doppio dell'area del triangolo ACB .



$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ \frac{13}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ \frac{13}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ \frac{13}{7} & \frac{3}{7} \\ 5 & -3 \end{matrix} = \frac{3}{7} + 25 - \frac{39}{7} - \frac{15}{7} + 3 - \frac{65}{7} =$$

$$= \frac{3 + 175 - 39 - 15 + 21 - 65}{7} = \frac{210}{7} = \frac{80}{7} \ .$$

L'area del triangolo ACB poteva essere calcolata anche con la formula: $S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CK}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \qquad K\left(\frac{1+5}{2} \ ; \ \frac{5-3}{2}\right) \equiv (3 \ ; 1)$$

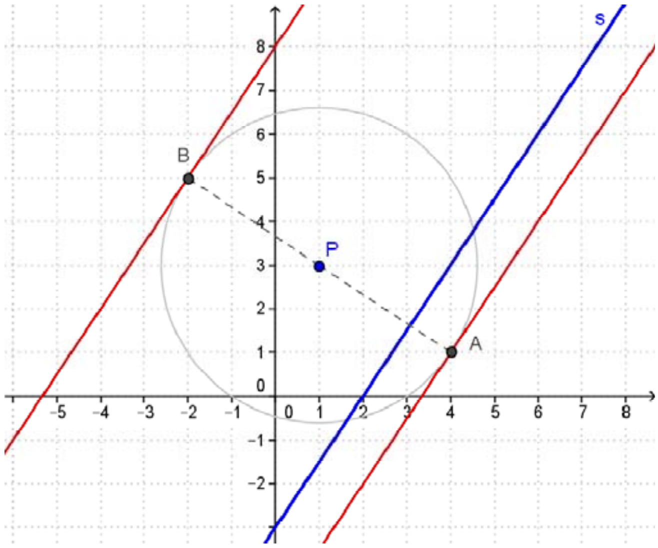
$$\overline{CK} = \sqrt{(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{7} - 3\right)^2 + \left(\frac{3}{7} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{49} + \frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{80}}{7} = \frac{4\sqrt{5}}{7} \ .$$

$$S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CK} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{7} = \frac{40}{7} \qquad \Rightarrow \qquad S_{ACBD} = 2 \cdot S_{ACB} = 2 \cdot \frac{40}{7} = \frac{80}{7}$$

Esercizio 226.475

Data la retta s di equazione $3x - 2y - 6 = 0$:

a. scrivi le equazioni delle rette r_1 e r_2 distanti $\sqrt{13}$ dal punto $P(1\,;3)$ e parallele a s;
b. detta t la retta per P perpendicolare a s, trova le coordinate dei punti A, B e C intersezioni di t con r_1, r_2 e s;
c. determina il punto D simmetrico di C rispetto a P e verifica che appartiene alla retta t.



Soluzione a

Il fascio di rette parallele a s ha equazione $\quad 3x - 2y + k = 0$

Determiniamo, fra queste, quelle distanti $\sqrt{13}$ dal punto P .

$d = \sqrt{13}\,;$

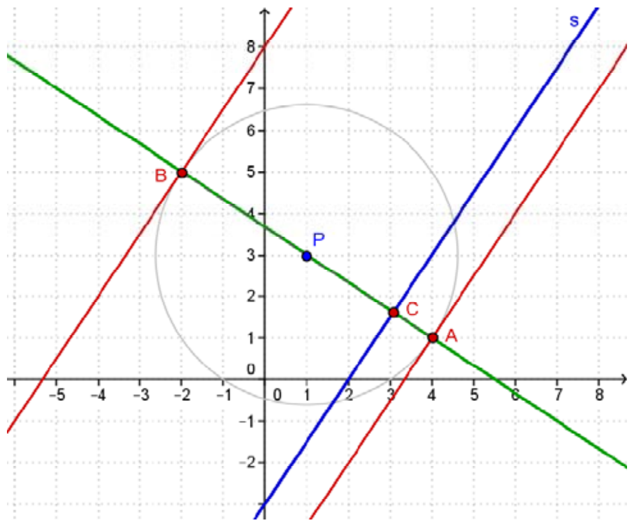
$$\frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{13}\,; \qquad \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + k|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \sqrt{13}\,;$$

$$\frac{|3 - 6 + k|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}\,; \qquad |3 - 6 + k| = 13\,; \qquad \begin{matrix} 3 - 6 + k = -13 & & k = -10 \\ 3 - 6 + k = +13 & & k = +16 \end{matrix}$$

Pertanto le due rette richieste hanno equazioni: $\qquad \begin{matrix} r_1 : & 3x - 2y - 10 = 0 \\ r_2 : & 3x - 2y + 16 = 0 \end{matrix}$

Soluzione b

La retta t passante per P e perpendicolare a s si ottiene utilizzando l'equazione del fascio di rette passante per P :



$$y - y_P = -\frac{1}{m_s}(x - x_P) \qquad con\ \ m_s = \frac{3}{2}$$

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 1) \qquad y - 3 = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

Le coordinate del punto A si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} t \\ r_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3} \\ 3x - 2y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}\right) - 10 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + \frac{4}{3}x - \frac{22}{3} - 10 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x + 4x - 22 - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x = 52 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{11}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{11}{3} = 1 \end{cases} \qquad A(4\,;1)\,.$$

Le coordinate del punto B si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} t \\ r_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3} \\ 3x - 2y + 16 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}\right) + 16 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + \frac{4}{3}x - \frac{22}{3} + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ 9x + 4x - 22 + 48 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ 13x = -26 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ x = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \cdot (-2) + \frac{11}{3} = \frac{4}{3} + \frac{11}{3} = 5 \\ \end{cases} \qquad B(-2\,;5)\,.$$

Le coordinate del punto B si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} t \\ s \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{3} \\ 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ 3x - 2 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{3}\right) - 6 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ 3x + \dfrac{4}{3}x - \dfrac{22}{3} - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ 9x + 4x - 22 - 18 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ 13x = 40 \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ x = \frac{40}{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{40}{13} + \frac{11}{3} = -\frac{80}{39} + \frac{11}{3} = \frac{63}{39} = \frac{21}{13} \\ \end{cases} \qquad C\left(\frac{40}{13}\,;\frac{21}{13}\right).$$

<u>*Soluzione 1c*</u>

Le equazioni della simmetria centrale: $\begin{cases} x_D = 2x_P - x_C \\ y_D = 2y_P - y_C \end{cases}$

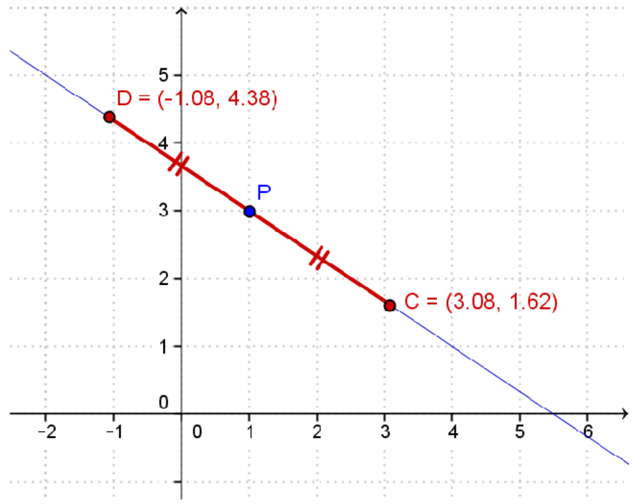
si ottengono considerando il punto P come punto medio del segmento CD .

$$x_P = \frac{x_C + x_D}{2}\,; \qquad 2x_P = x_C + x_D\,; \qquad x_D = 2x_P - x_C$$

$$y_P = \frac{y_C + y_D}{2}\,; \qquad 2y_P = y_C + y_D\,; \qquad y_D = 2y_P - y_C$$

Applicando tali formule si ottiene:

$$\begin{cases} x_D = 2 \cdot 1 - \dfrac{40}{13} = -\dfrac{14}{13} \\ y_D = 2 \cdot 3 - \dfrac{21}{13} = \dfrac{78 - 21}{13} = \dfrac{57}{13} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad P\left(-\frac{14}{13}\,;\frac{57}{13}\right)$$



Oppure sostituendo direttamente le coordinate dei punti nelle formule del punto medio:

$$x_P = \frac{x_C + x_D}{2}\,; \qquad 1 = \frac{\frac{40}{13} + x_D}{2}\,; \qquad 2 = \frac{40}{13} + x_D\,; \qquad x_D = 2 - \frac{40}{13} = -\frac{14}{13}$$

$$y_P = \frac{y_C + y_D}{2}\,; \qquad 3 = \frac{\frac{21}{13} + y_D}{2}\,; \qquad 6 = \frac{21}{13} + y_D\,; \qquad y_D = 6 - \frac{21}{13} = \frac{78 - 21}{13} = \frac{57}{13}$$

Il punto $P\left(-\frac{14}{13}\,;\frac{57}{13}\right)$ appartiene alla retta t, infatti:

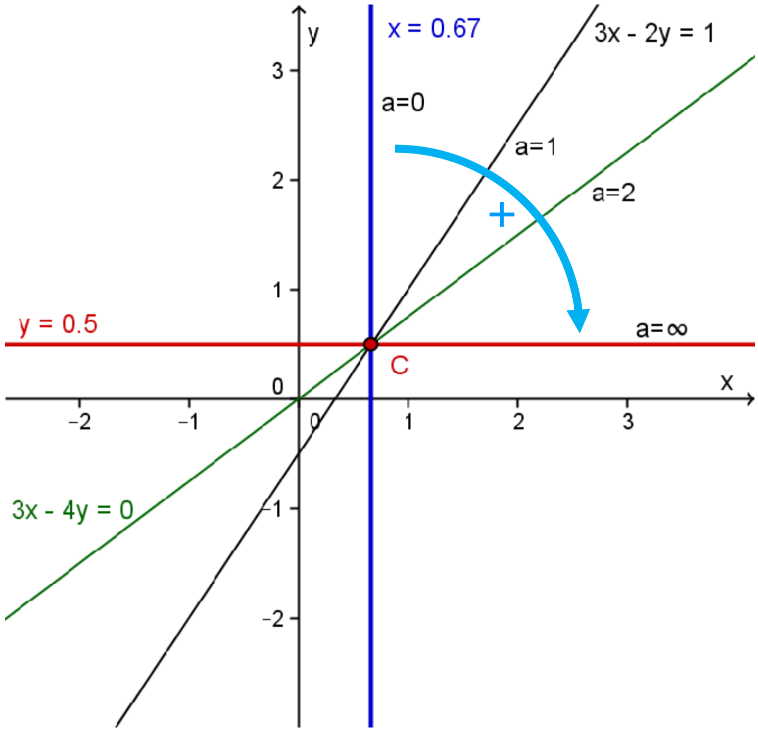
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}\,; \qquad \frac{57}{13} = -\frac{2}{3} \cdot -\frac{14}{13} + \frac{11}{3}\,; \qquad \frac{57}{13} = \frac{28}{39} + \frac{11}{3}\,;$$

$$\frac{57}{13} = \frac{28 + 143}{39}\,; \qquad \frac{57}{13} = \frac{171}{39}\,; \qquad \frac{57}{13} = \frac{57}{13}\,.$$

Esercizio 226.476

Data la retta r di equazione $3x - 2ay + a - 2 = 0$ determina a in modo che :

a. r passi per l'origine;
b. abbia coefficiente angolare positivo;
c. sia parallela alla retta passante per $A(1\,;1)$, $B(5\,;-7)$
d. abbia distanza dall'origine minore di 1;
e. formi con la direzione positiva dell'asse x un angolo compreso tra $45°$ e $60°$.



Soluzione a

Calcoliamo il coefficiente angolare del fascio:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-2a} = \frac{3}{2a}$$

Essendo il coefficiente angolare dipendente dal parametro a, si tratta di un fascio proprio di rette.

Per determinare il centro del fascio scriviamo la sua equazione come combinazione lineare di due rette, raccogliendo a fattor comune il parametro k :

$3x - 2ay + a - 2 = 0\,;$

$3x - 2 + \boldsymbol{a} \cdot (1 - 2y) = 0\,;$

Il centro del fascio si ottiene risolvendo il sistema fra le due rette che formano la combinazione lineare:

$$\begin{cases} 3x - 2 = 0 \\ 1 - 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad C\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right)$$

La retta del fascio $3x - 2ay + a - 2 = 0$ che passa per l'origine è quella che ha termine noto nullo: $a - 2 = 0$ cioè $a = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y = 0\,.$

Il fascio di rette:

- per $a = 0$ si ottiene la retta **blue** $3x - 2 = 0\,;$
- per $a = 1$ si ottiene la retta **nera** $3x - 2y - 1 = 0$
- per $a = 2$ si ottiene la retta **verde** $3x - 4y = 0$
- per $a = \infty$ si ottiene la retta **rossa** $1 - 2y = 0\,;$

Rappresentando queste rette si deduce che al crescere di $k \in R$, si ottengono rette che ruotano intorno al centro C in senso orario.

Soluzione b

La retta del fascio $3x - 2ay + a - 2 = 0$ che ha coefficiente angolare positivo si ottiene ponendo $m > 0$, cioè

$$-\frac{a}{b} > 0\,; \qquad -\frac{3}{-2a} > 0\,; \qquad \frac{3}{2a} > 0\,; \qquad 2a > 0\,; \qquad a > 0\,.$$

Soluzione c

La retta del fascio richiesta deve avere coefficiente angolare uguale a quello della retta AB.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1+7}{1-5} = \frac{8}{-4} = -2$$

Imponendo $m = -2$ si ha:

$$-\frac{a}{b} = -2\,; \qquad -\frac{3}{-2a} = -2\,; \qquad \frac{3}{2a} = -2\,; \qquad 3 = -4a\,; \qquad a = -\frac{3}{4}.$$

Soluzione d

Imponiamo che la distanza della retta del fascio $3x - 2ay + a - 2 = 0$ dall'origine sia minore di 1:

$d(r;O) < 1$; $\qquad \dfrac{|ax_O + by_O + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1$; $\qquad \dfrac{|3\cdot 0 - 2a\cdot 0 + a - 2|}{\sqrt{3^2+(-2a)^2}} < 1$;

$\dfrac{|a-2|}{\sqrt{9+4a^2}} < 1$; $\qquad \dfrac{|a-2|}{\sqrt{9+4a^2}} - 1 < 0$; $\qquad \dfrac{|a-2| - \sqrt{9+4a^2}}{\sqrt{9+4a^2}} < 0$;

Essendo il denominatore positivo $\forall a \in R$, la frazione è negativa quando è negativo il numeratore:

$|a-2| - \sqrt{9+4a^2} < 0$; $\qquad |a-2| < \sqrt{9+4a^2}$;

Essendo $\sqrt{9+4a^2} > 0 \quad \forall a \in R \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a - 2 < +\sqrt{9+4a^2} \\ a - 2 > -\sqrt{9+4a^2} \end{cases}$

Risolviamo prima: $\qquad a - 2 < +\sqrt{9+4a^2}$;

$\begin{cases} a - 2 < 0 \\ 9 + 4a^2 \geq 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} a - 2 \geq 0 \\ (a-2)^2 < \left(\sqrt{9+4a^2}\right)^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a < 2 \\ \forall a \in R \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} a \geq 2 \\ a^2 + 4 - 4a < 9 + 4a^2 \end{cases}$

$a < 2 \qquad \vee \qquad \begin{cases} a \geq 2 \\ 3a^2 + 4a + 5 > 0 \end{cases}$

$a < 2 \qquad \vee \qquad \begin{cases} a \geq 2 \\ \forall a \in R \end{cases}$

$a < 2 \qquad \vee \qquad a \geq 2$

Cioè $\forall a \in R$.

Risolviamo poi: $\qquad a - 2 > -\sqrt{9+4a^2}$;

$\sqrt{9+4a^2} > 2 - a$

$\begin{cases} 2 - a < 0 \\ 9 + 4a^2 \geq 0 \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} 2 - a \geq 0 \\ \left(\sqrt{9+4a^2}\right)^2 > (2-a)^2 \end{cases}$

$\begin{cases} a > 2 \\ \forall a \in R \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} a \leq 2 \\ 9 + 4a^2 > a^2 + 4 - 4a \end{cases}$

$a > 2 \qquad \vee \qquad \begin{cases} a \leq 2 \\ 3a^2 + 4a + 5 > 0 \end{cases}$

$a > 2 \qquad \vee \qquad \begin{cases} a \leq 2 \\ \forall a \in R \end{cases}$

$a > 2 \qquad \vee \qquad a \leq 2$

Cioè $\forall a \in R$.

Ritornando al sistema $\begin{cases} a - 2 < +\sqrt{9+4a^2} \\ a - 2 > -\sqrt{9+4a^2} \end{cases}$ si ha: $\begin{cases} \forall a \in R \\ \forall a \in R \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \forall a \in R$

Soluzione e

Ricordiamo che: $tg\ 45° = 1$ e $tg\ 60° = \sqrt{3}$

Il coefficiente angolare del fascio è:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-2a} = \frac{3}{2a}$$

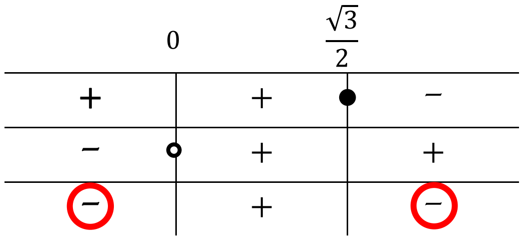
Occorre risolvere le disequazioni:

$$1 \le \frac{3}{2a} \le \sqrt{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \frac{3}{2a} \le \sqrt{3} \\ 1 \le \frac{3}{2a} \end{cases}$$

Risolviamo prima:

$$\frac{3}{2a} \le \sqrt{3}\,; \qquad \frac{3}{2a} - \sqrt{3} \le 0\,; \qquad \frac{3 - 2\sqrt{3}a}{2a} \le 0\,;$$

$$\begin{matrix} N \ge 0 \\ D > 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 - 2\sqrt{3}a \ge 0 \\ 2a > 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a \le \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ a > 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a \le \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a > 0 \end{matrix}$$

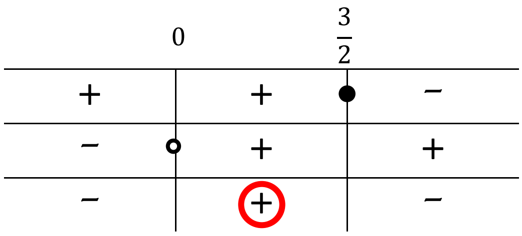


Dal prodotto dei segni si ottiene: $a < 0 \quad \vee \quad a \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

Risolviamo poi:

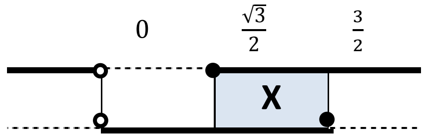
$$1 \le \frac{3}{2a}\,; \qquad \frac{3}{2a} - 1 \ge 0\,; \qquad \frac{3 - 2a}{2a} \ge 0\,;$$

$$\begin{matrix} N \ge 0 \\ D > 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 - 2a \ge 0 \\ 2a > 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a \le \frac{3}{2} \\ a > 0 \end{matrix}$$



Dal prodotto dei segni si ottiene: $0 < a \le \frac{3}{2}$

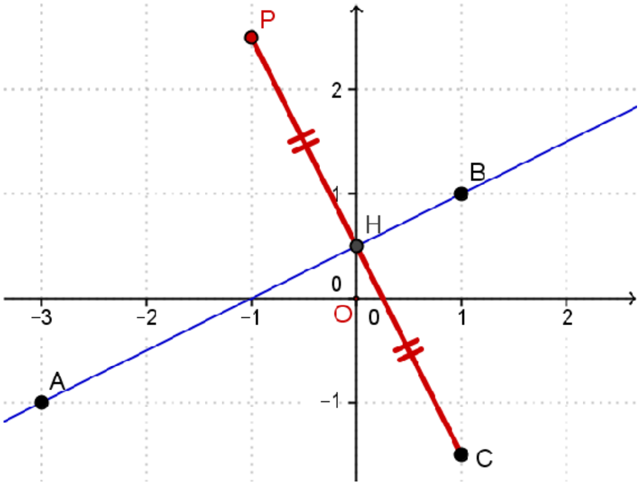
Ritornando al sistema $\begin{cases} \frac{3}{2a} \le \sqrt{3} \\ 1 \le \frac{3}{2a} \end{cases}$ si ha: $\begin{cases} a < 0 \quad \vee \quad a \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 < a \le \frac{3}{2} \end{cases}$



Da cui si ottiene: $\frac{\sqrt{3}}{2} \le a \le \frac{3}{2}$

Esercizio 226.479

Sono dati i punti $A(-3\,;\,-1)$, $B(1\,;\,1)$ e $C\left(1\,;\,-\frac{3}{2}\right)$. Determina le coordinate del punto P, simmetrico di C rispetto alla retta AB, e l'area del quadrilatero $ACBP$.



Soluzione 1

Per determinare le coordinate del punto P, simmetrico di C rispetto alla retta AB è sufficiente imporre che:

1. Il punto medio H del segmento PC appartenga ad r;
2. La retta PC sia perpendicolare alla retta AB.

Determiniamo innanzitutto l'equazione della retta AB:

$\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}\,;$ $\qquad \dfrac{y+1}{1+1}=\dfrac{x+3}{1+3}\,;$

$\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{x+3}{4}\,;$ $\qquad 2y+2=x+3\,;$

$x-2y+1=0$

Siano $(x_P\,;\,y_P)$ le coordinate del punto P richiesto.

Il punto H ha quindi coordinate: $H\left(\frac{x_P+1}{2}\,;\,\frac{y_P-\frac{3}{2}}{2}\right)$. La condizione di appartenenza di H alla retta r si traduce in:

$\frac{x_P+1}{2}-2\cdot\frac{y_P-\frac{3}{2}}{2}+1=0\,;$ $\quad \frac{x_P+1}{2}-\left(y_P-\frac{3}{2}\right)+1=0\,;$ $\quad x_P+1-2y_P+3+2=0$ $\quad x_P-2y_P+6=0$

Il coefficiente angolare della retta AB è $m_{AB}=\frac{1}{2}$

Il coefficiente angolare della retta PC è $m_{PC}=\frac{y_P-y_C}{x_P-x_C}=\frac{y_P+\frac{3}{2}}{x_P-1}$

La condizione di perpendicolarità $AB\perp PC$ si traduce in: $\frac{y_P+\frac{3}{2}}{x_P-1}=-2$

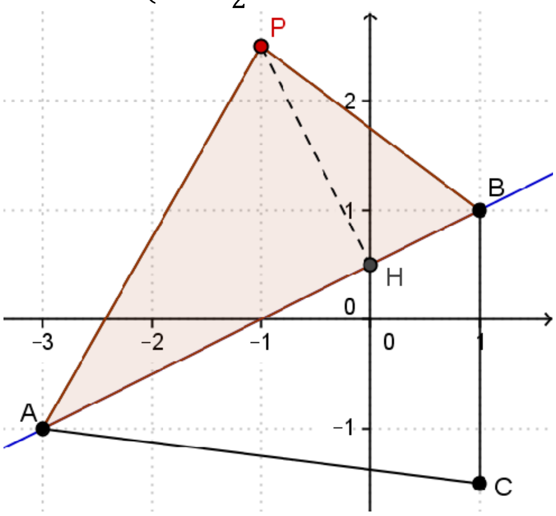
Risolvendo il sistema fra le due condizioni si ha:

$\begin{cases} x_P-2y_P+6=0 \\ \dfrac{y_P+\dfrac{3}{2}}{x_P-1}=-2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_P-2y_P+6=0 \\ y_P+\dfrac{3}{2}=-2(x_P-1) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_P-2y_P+6=0 \\ y_P+\dfrac{3}{2}=-2x_P+2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_P-2y_P+6=0 \\ 2y_P+3=-4x_P+4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_P=2y_P-6 \\ 2y_P+4x_P=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} - \\ 2y_P+4(2y_P-6)=1 \end{cases}$

$\begin{cases} - \\ 2y_P+8y_P-24=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} - \\ 10y_P=25 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_P=2\cdot\dfrac{5}{2}-6=-1 \\ y_P=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

Pertanto il punto richiesto ha coordinate $P\left(-1\,;\,\frac{5}{2}\right)$.



L'area del quadrilatero $ACBP$ è uguale al doppio dell'area del triangolo ABP.

Pertanto occorre calcolare la misura della base AB e dell'altezza PH del triangolo.

$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+(-1-1)^2}=$

$=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

Il punto H ha quindi coordinate: $H\left(\frac{x_P+1}{2}=\frac{-1+1}{2}\,;\,\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2}\right)\equiv\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

$\overline{PH}=\sqrt{(x_P-x_H)^2+(y_P-y_H)^2}=\sqrt{(-1-0)^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=$

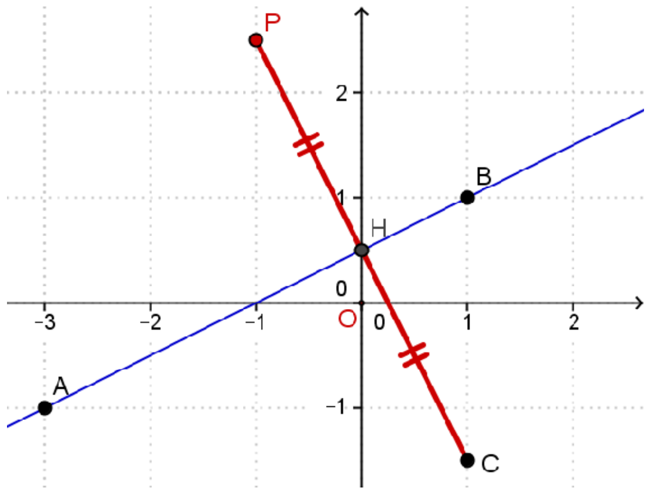
$=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

L'area del quadrilatero $ACBP$ è uguale a $S_{ACBP}=2\cdot S_{ABP}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{PH}=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=10$.

Soluzione 2

Per determinare le coordinate del punto P, simmetrico di C rispetto alla retta AB è sufficiente determinare:

1. le coordinate del punto H
2. esprimere H come punto medio del segmento PC



Determiniamo innanzitutto l'equazione della retta AB:

$\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}$; $\quad\dfrac{y+1}{1+1}=\dfrac{x+3}{1+3}$;

$\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{x+3}{4}$; $\quad 2y+2=x+3$;

$x-2y+1=0 \quad \Rightarrow \quad m_{AB}=\frac{1}{2}$.

Determiniamo poi l'equazione della retta PC, come retta passante per C e perpendicolare ad AB.

$y-y_C=-\dfrac{1}{m_{AB}}(y-y_C)$; $\quad y+\dfrac{3}{2}=-2(x-1)$; $\quad 2y+3=-4(x-1)$; $\quad 4x+2y-1=0$.

Le coordinate del punto si ottengono:

$\begin{cases} PC \\ AB \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x+2y-1=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} — \\ x=2y-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4(2y-1)+2y-1=0 \\ — \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 8y-4+2y-1=0 \\ — \end{cases}$

$\begin{cases} 10y=5 \\ — \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ — \end{cases}$ $\quad \begin{cases} — \\ x=2\cdot\frac{1}{2}-1=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \Rightarrow \quad H\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$.

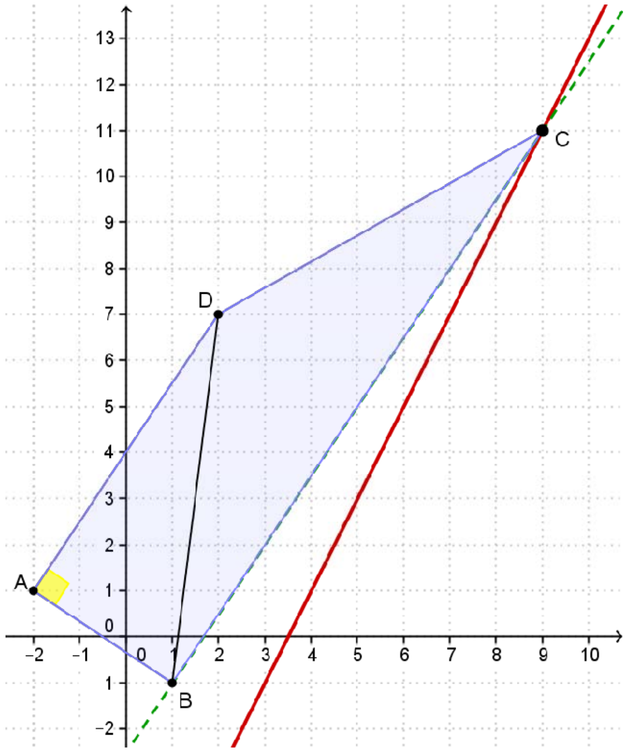
Esprimendo H come punto medio del segmento PC si ottiene:

$$\begin{cases} x_H=\dfrac{x_P+x_C}{2} \\ y_H=\dfrac{y_P+y_C}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 0=\dfrac{x_P+1}{2} \\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{y_P-\frac{3}{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 0=x_P+1 \\ 1=y_P-\dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_P=-1 \\ y_P=1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P\left(-1\,;\frac{5}{2}\right)$$

Esercizio 226.484

Siano dati i punti $A(-2\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ -1)$ e $D(2\ ;\ 7)$ e la retta r di equazione $2x - y - 7 = 0$.

a. Verifica che il triangolo ABD è rettangolo in A.
b. Trova un punto C su r in modo che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio avente BC e AD come basi.
c. Calcola l'area del trapezio trovato.



Soluzione a

Per verificare che il triangolo ABD è rettangolo in A è sufficiente verificare che il coefficiente angolare del lato AB è l'opposto del reciproco del coefficiente angolare del lato AD.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1+1}{-2-1} = -\frac{2}{3}$$

$$m_{AD} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{1-7}{-2-2} = \frac{-6}{-4} = +\frac{3}{2}.$$

Soluzione b

Le coordinate del punto C si possono ottenere come intersezione fra l'equazione della retta r e la retta passante per B e parallela ad AD.

La retta passante per il punto B e parallela ad AD ha equazione:

$$y - y_B = m_{AD}(x - x_B)\ ; \qquad y + 1 = \frac{3}{2}(x-1)\ ; \qquad y + 1 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\ ; \qquad y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\ ;$$

Le coordinate del punto C si ottengono quindi risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} r \\ BC \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right) - 7 = 0 \\ y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} - 7 = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3x + 5 - 14 = 0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 9 \\ y = \frac{3}{2}\cdot 9 - \frac{5}{2} = \frac{27}{2} - \frac{5}{2} = 11 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C(9\ ;\ 11)$$

Soluzione c

Per calcola l'area del trapezio $ABCD$ occorre determinare le misure delle basi e dell'altezza.

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(1-9)^2 + (-1-11)^2} = \sqrt{64+144} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

L'area del trapezio $ABCD$ è pertanto:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}\cdot \overline{AB} = \frac{4\sqrt{13} + 2\sqrt{13}}{2}\cdot\sqrt{13} = 3\sqrt{13}\cdot\sqrt{13} = 39\,.$$

Esercizio 239.18

Rappresenta graficamente la funzione di equazione: $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x + 1|$.

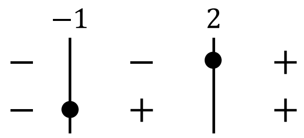
A. Determina le coordinate dei punti A, B, C, $(x_A < x_B < x_C)$ del grafico dato, le cui ascisse sono soluzioni dell'equazione $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$
B. Individua il punto D tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio isoscele.
C. Calcola il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$.
D. Verifica che congiungendo i punti medi dei lati si ottiene un rombo che ha l'area uguale alla metà di quella del trapezio.

Soluzione

$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + |x + 1| = \sqrt{(x-2)^2} + |x + 1| = |x - 2| + |x + 1|$ cioè:

$y = |x - 2| + |x + 1|$

Studiamo i segni dei due valori assoluti:



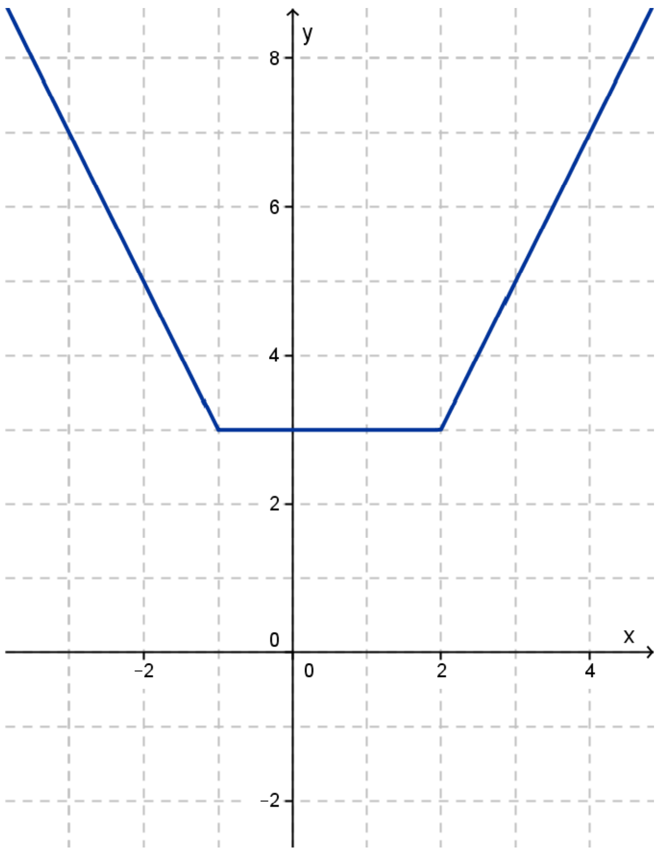
$x - 2 \geq 0 \qquad x \geq 2$
$x + 1 \geq 0 \qquad x \geq -1$

Pertanto si ha:

$$y = |x - 2| + |x + 1| = \begin{cases} -(x-2) - (x+1) & se \quad x < -1 \\ -(x-2) + (x+1) & se \quad -1 \leq x \leq 2 \\ +(x-2) + (x+1) & se \quad x > 2 \end{cases} \qquad \text{cioè:}$$

$$y = |x - 2| + |x + 1| = \begin{cases} -2x + 1 & se \quad x < -1 \\ 3 & se \quad -1 \leq x \leq 2 \\ +2x - 1 & se \quad x > 2 \end{cases}$$

Il cui grafico è:



Soluzione A

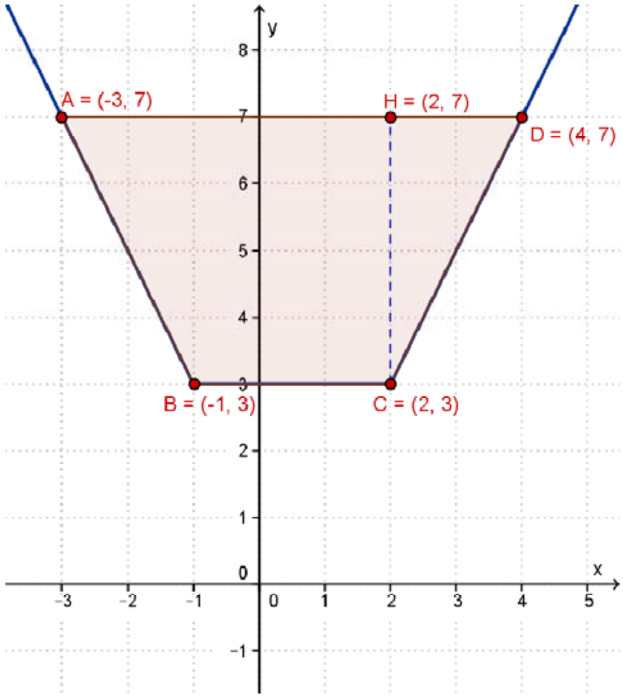
$x^3+2x^2-5x-6=0\,;$

$(x+1)(x^2+x-6)=0$

Le cui soluzioni sono:

	1	2	-5	-6
-1		-1	-1	+6
	1	1	-6	=

$x_A=-3 \qquad x_B=-1 \qquad x_C=2$



$y_A=-2(-3)+1=7 \qquad \Rightarrow \qquad A(-3\,;7)$

$y_B=3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{B}(-1\,;3)$

$y_C=+2\cdot 2-1=3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{C}(2\,;3)$

Soluzione B

Dall'esame del grafico si ha: $y_D=7 \qquad \Rightarrow$

$7=2x_D-1\,; \qquad 2x_D=8\,; \qquad x_D=4$

Pertanto il punto D ha coordinate: $D(4\,;7)$.

Soluzione C

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{\left(-3-(-1)\right)^2+(7-3)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ .$$

$\overline{BC}=|x_B-x_C|=|-1-2|=3$.

$\overline{AD}=|x_A-x_D|=|-3-4|=7$.

$\overline{CH}=|y_C-y_H|=|-3-7|=4$.

Il perimetro è:

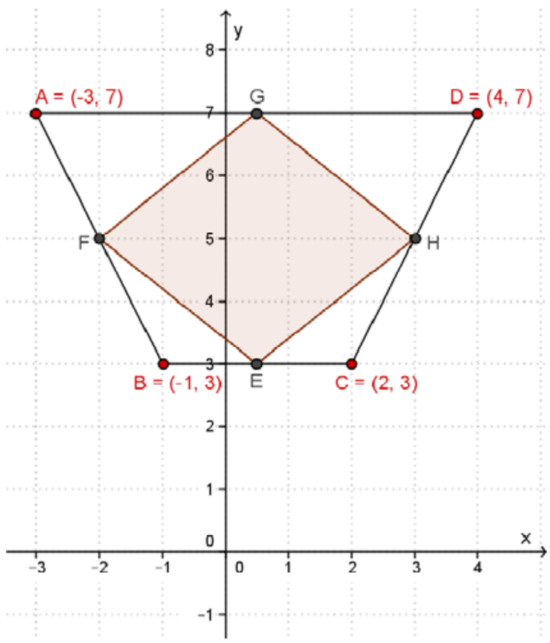
$2p=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD} \quad = \quad 2\sqrt{5}+3+2\sqrt{5}+7 \quad = \quad 10+4\sqrt{5}\,.$

L'area è:

$$S=\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\cdot\overline{CH}=\frac{3+7}{2}\cdot 4=20\,.$$

Soluzione D

Per dimostrare che il quadrilatero $EFGH$ è un rombo è sufficiente dimostrare che ha tutti i lati congruenti.



$x_F=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-3-1}{2}=-2 \qquad y_F=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{7+3}{2}=5$

$x_E=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{-1+2}{2}=\dfrac{1}{2} \qquad y_E=3$

$x_H=\dfrac{x_C+x_D}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3 \qquad y_H=\dfrac{y_C+y_D}{2}=\dfrac{3+7}{2}=5$

$x_G=\dfrac{x_A+x_D}{2}=\dfrac{-3+4}{2}=\dfrac{1}{2} \qquad y_G=7$

$$\overline{EF} = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2} \;=\; \sqrt{\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2 + (3-5)^2} \;=\; \sqrt{\frac{25}{4} + 4} \;=\; \frac{\sqrt{41}}{2}\,.$$

$$\overline{FG} = \sqrt{(x_F - x_G)^2 + (y_F - y_G)^2} \;=\; \sqrt{\left(-2 - \frac{1}{2}\right)^2 + (5-7)^2} \;=\; \sqrt{\frac{25}{4} + 4} \;=\; \frac{\sqrt{41}}{2}\,.$$

$$\overline{GH} = \sqrt{(x_G - x_H)^2 + (y_G - y_H)^2} \;=\; \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 3\right)^2 + (7-5)^2} \;=\; \sqrt{\frac{25}{4} + 4} \;=\; \frac{\sqrt{41}}{2}\,.$$

$$\overline{EH} = \sqrt{(x_E - x_H)^2 + (y_E - y_H)^2} \;=\; \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 3\right)^2 + (3-5)^2} \;=\; \sqrt{\frac{25}{4} + 4} \;=\; \frac{\sqrt{41}}{2}\,.$$

Per determinare l’area del rombo determiniamo le misure delle diagonali:

$$\overline{FH} = |x_F - x_H| \;=\; |-2-3| \;=\; 5\,.$$

$$\overline{GE} = |y_G - y_E| \;=\; |7-3| \;=\; 4\,.$$

L’area del rombo è:

$$S = \frac{\overline{FH} \cdot \overline{GE}}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\,.$$