La retta

Esercizi 1

Esercizio 1

Determinare l'equazione della retta passante per $P(5;-7)$ e parallela alla retta $y = 3x - 2$.

$$y+7=3\cdot(x-5)\ ; \qquad y+7=3x-15\ ; \qquad y=3x-22\ .$$

Esercizio 2

Determinare l'equazione della retta passante per $P(5\,;-7)$ e perpendicolare alla retta $y = 3x - 2$.

$$y+7=-\frac{1}{3}\cdot(x-5)\ ; \qquad y+7=-\frac{1}{3}\cdot x+\frac{5}{3}\ ; \qquad y=-\frac{1}{3}\cdot x+\frac{5}{3}-7\ ; \qquad y=-\frac{1}{3}\cdot x-\frac{16}{3}.$$

Esercizio 3

Determinare il coefficiente angolare della retta passante per i punti $P_1\,(3\,;\,-5)$ e $P_2(-2\,;\,1)$.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1+5}{-2-3}=-\frac{6}{5}$$

Esercizio 4

Determinare l'equazione della retta passante per i punti P1 (3 ; -5) e P 2 (-2 ; 1).

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ ; \qquad \frac{y+5}{1+5}=\frac{x-3}{-2-3}\ ; \qquad \frac{y+5}{6}=\frac{x-3}{-5}\ ; \qquad -5\cdot(y+5)=6\cdot(x-3)\ ;$$

$$-5y-25=6x-18\ ; \qquad -5y=6x-18+25\ ; \qquad 5y=-6x-7\ ; \qquad y=-\frac{6}{5}x-\frac{7}{5}\ .$$

Esercizio 5

Stabilire se i tre punti P_1 (-2 ; -1) , P_2 (2 ; 1) , P_3 (4 ; 2) sono allineati.

Essendo $\frac{2+1}{1+1}=\frac{4+2}{2+2}$; $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$, $\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$, i tre punti sono allineati.

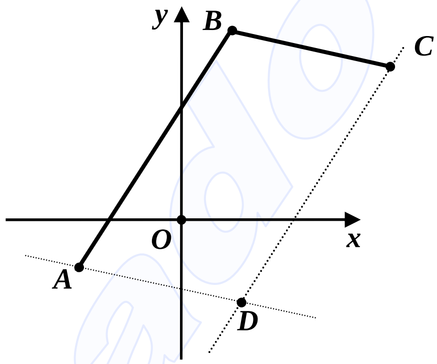
Esercizio 6

Determinare l'equazione segmentaria della retta passante per i punti A (5 ; 0) e B (0 ; 3).

L'equazione della retta richiesta è $\frac{y}{3}+\frac{x}{5}=1$.

Esercizio 7

Determinare il quarto vertice di un parallelogramma, i cui primi tre hanno coordinate A (-2; -1) , B (1; 4) , C (4; 3) ed essendo il vertice D opposto al vertice B.



Soluzione 1

Il quarto vertice D del parallelogramma è il punto di incontro delle rette AD e CD.

La retta AD non è altro che la retta passante per il punto A (-2; -1) e parallela alla retta BC.

Il coefficiente angolare della retta BC è:

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

La retta AD ha pertanto equazione: $y - y_A = m_{BC} \cdot (x - x_A)$;

$$y + 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x+2) \ ;$$

$$y + 1 = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \ ; \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \ .$$

La retta CD non è altro che la retta passante per il punto C (4; 3) e parallela alla retta AB.

Il coefficiente angolare della retta AB è:

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4+1}{1+2} = \frac{5}{3}$$

La retta CD ha pertanto equazione: $y - y_C = m_{AB} \cdot (x - x_C)$; $y - 3 = \frac{5}{3} \cdot (x-4)$;

$$y - 3 = \frac{5}{3}x - \frac{20}{3} \ ; \quad y = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}$$

Le coordinate del quarto vertice del parallelogramma sono date da:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ \frac{5}{3}x - \frac{11}{3} = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 5x - 11 = -x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 6x = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{3}x - \frac{11}{3} = \frac{5}{3} \cdot 1 - \frac{11}{3} = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Le coordinate del quarto vertice D sono D (1; -2) .

Soluzione 2

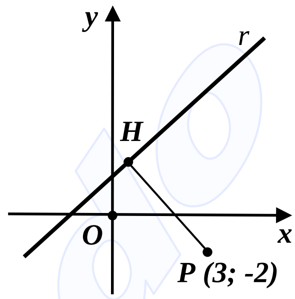
Le coordinate del quarto vertice del parallelogramma possono essere determinate con le formule:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ y_1 + y_3 = y_2 + y_4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \quad \begin{cases} -2 + 4 = 1 + x_D \\ -1 + 3 = 4 + y_D \end{cases} \quad \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = -2 \end{cases}$$

Le coordinate del quarto vertice D sono D (1; -2) .

Esercizio 8

Determinare la distanza del punto P (3; – 2) dalla retta r: 3 x – 4 y + 5 = 0.



Soluzione 1

Per calcolare la distanza del punto P dalla retta r è necessario conoscere, oltre le coordinate del punto P, le coordinate del punto H, piede della perpendicolare condotta dal punto P alla retta r.

Il punto H è il punto di intersezione delle due rette PH ed r.

Calcoliamo pertanto l'equazione della retta PH:

Il coefficiente angolare della retta r è $m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$

L'equazione della retta PH (retta passante per il punto P e perpendicolare alla retta r) è:

$$y - y_P = -\frac{1}{m_r} \cdot (x - x_P) \ ; \quad y - (-2) = -\frac{4}{3} \cdot (x - 3) \ ; \quad y + 2 = -\frac{4}{3} x + 4 \ ; \ y = -\frac{4}{3} x + 2$$

Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette PH ed r:

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3} x + 2 \\ 3x - 4y + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 3x - 4 \cdot \left(-\frac{4}{3} x + 2 \right) + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 3x + \frac{16}{3} x - 8 + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 9x + 16x - 24 + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} --- \\ 25x = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x = \frac{9}{25} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{4}{3} x + 2 = -\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{25} + 2 = -\frac{12}{25} + 2 = \frac{38}{25} \\ x = \frac{9}{25} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{38}{25} \\ x = \frac{9}{25} \end{cases} \qquad H \left(\frac{9}{25} ; \frac{38}{25} \right)$$

Calcoliamo la misura dell'altezza AH:

$$PH = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{25} - 3 \right)^2 + \left(\frac{38}{25} + 2 \right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{66}{25} \right)^2 + \left(\frac{88}{25} \right)^2} = \sqrt{\frac{4356}{625} + \frac{7744}{625}} =$$

$$= \sqrt{\frac{12100}{625}} = \sqrt{\frac{484}{25}} = \frac{22}{5} \ .$$

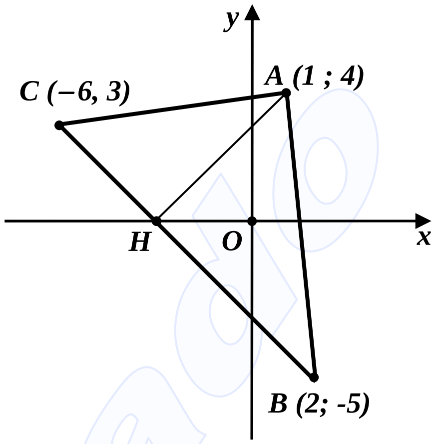
Soluzione 2

La distanza del punto P dalla retta r si può calcolare velocemente con la formula:

$$PH = \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|9 + 8 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|22|}{\sqrt{25}} = \frac{22}{5} \ .$$

Esercizio 9

Determinare l'area del triangolo di vertici $A(1;\ 4), B(2;\ -5)$ e $C(-6;\ 3)$.



Soluzione 1

Considerando il lato BC come base del triangolo e il segmento AH come la relativa altezza. L'area del triangolo è data da:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \ .$$

Calcoliamo la misura della base BC:

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2+6)^2 + (-5-3)^2} =$$

$$= \sqrt{(8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \ .$$

Per calcolare la misura dell'altezza CH è necessario conoscere le coordinate del punto H.

Il punto H è il punto di intersezione delle due rette BC e AH.

Calcoliamo pertanto le equazioni delle rette BC e AH.

L'equazione della retta BC è: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$; $\frac{y-3}{-5-3} = \frac{x+6}{2+6}$; $\frac{y-3}{-8} = \frac{x+6}{8}$; $\frac{y-3}{-1} = \frac{x+6}{1}$;

$1 \cdot (y-3) = -1 \cdot (x+6)$; $y - 3 = -x - 6$; $y = -x - 3$ avente coefficiente angolare $m_{BC} = -1$.

L'equazione della retta AH è: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$; $y - y_A = -\frac{1}{m_{BC}} \cdot (x - x_A)$; $y - 4 = 1 \cdot (x - 1)$;

$y - 4 = x - 1$; $y = x + 3$.

Le coordinate del punto H si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle rette BC e AH:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x + 3 = -x - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 2x = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 3 = -3 + 3 = 0 \\ x = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases} \quad H\ (-3;\ 0)$$

Calcoliamo la misura dell'altezza AH:

$$AH = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1+3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \ .$$

In definitiva l'area del triangolo è $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 32$.

Soluzione 2

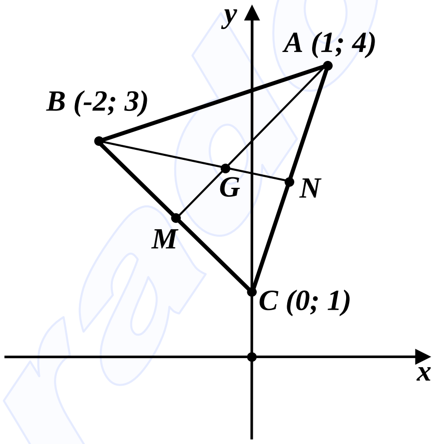
L'area del triangolo può essere calcolata anche con la formula:

$$S = \pm\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -6-1 & 3-4 \\ 2-1 & -5-4 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{2} \cdot [-7 \cdot (-9) - 1 \cdot (-1)] = \pm\frac{1}{2} \cdot [63 + 1] = \pm\frac{1}{2} \cdot 64 = 32 \ .$$

Esercizio 10

Determinare il baricentro del triangolo avente vertici in A (1 ; 4) , B (– 2 ; 3) , C (0 ; 1).



Soluzione 1

Il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle tre mediane.

Determiniamo le coordinate del punto medio M del lato BC:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= = \frac{x_B + x_c}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 ; \\ y_M &= = \frac{y_B + y_c}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \end{aligned}\right\} H\,(-1 ; 2)$$

Determiniamo l'equazione della mediana AM:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} ; \quad \frac{y-4}{2-4} = \frac{x-1}{-1-1} ; \quad \frac{y-4}{-2} = \frac{x-1}{-2} ;$$

$$y-4 = x-1 \;; \quad y = x+3$$

Determiniamo le coordinate del punto medio N del lato AC:

$$\left.\begin{aligned} x_N &= = \frac{x_A + x_c}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} ; \\ y_N &= = \frac{y_A + y_c}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}\right\} N\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$$

Determiniamo l'equazione della mediana BN:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} ; \quad \frac{y-3}{\frac{5}{2}-3} = \frac{x+2}{\frac{1}{2}+2} ; \quad \frac{y-3}{-\frac{1}{2}} = \frac{x+2}{\frac{5}{2}} ; \quad \frac{5}{2}\cdot(y-3) = -\frac{1}{2}\cdot(x+2) ; \quad \frac{5}{2}y - \frac{15}{2} = -\frac{1}{2}x - 1 ;$$

$$5y-15 = -x-2 \;; \quad x+5y-13 = 0$$

Determiniamo le coordinate del baricentro G, punto incontro delle due mediane:

$$\begin{cases} y = x+3 \\ x+5y-13 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x+5\cdot(x+3)-13 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x+5x+15-13 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 6x = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x+3 = -\frac{1}{3}+3 = \frac{8}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Il baricentro pertanto ha coordinate: $G\left(-\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Soluzione 2

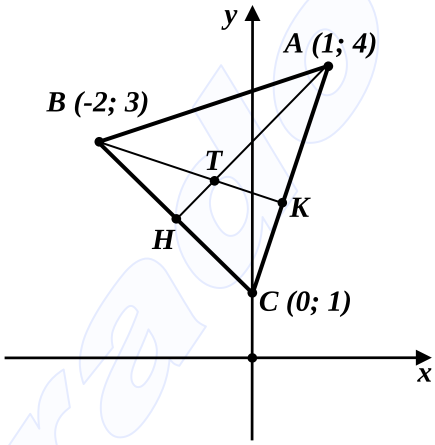
Le coordinate del baricentro possono essere calcolate anche con le formule:

$$x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{1-2+0}{3} = \frac{1-2+0}{3} = -\frac{1}{3} ; \qquad y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{4+3+1}{3} = \frac{8}{3}$$

Esercizio 11

Determinare l'ortocentro del triangolo avente vertici in A (1 ; 4) , B (– 2 ; 3) , *C (0 ; 1).*

Soluzione



L'ortocentro di un triangolo è il punto di incontro delle tre altezze.

Determiniamo il coefficiente angolare della retta BC:

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{0+2} = -1$$

Determiniamo l'equazione dell'altezza AH:

$$y - y_A = -\frac{1}{m_{BC}} \cdot (x - x_A)\ ; \quad y - 4 = 1 \cdot (x-1)\ ; \quad y = x+3.$$

Determiniamo il coefficiente angolare della retta AC:

$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{1-0} = 3\,.$$

Determiniamo l'equazione dell'altezza BK:

$$y - y_B = -\frac{1}{m_{AC}} \cdot (x - x_B)\ ; \quad y - 3 = -\frac{1}{3} \cdot (x+2)\ ; \quad y - 3 = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\ ; \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Determiniamo le coordinate dell'ortocentro T, punto di incontro delle due altezze:

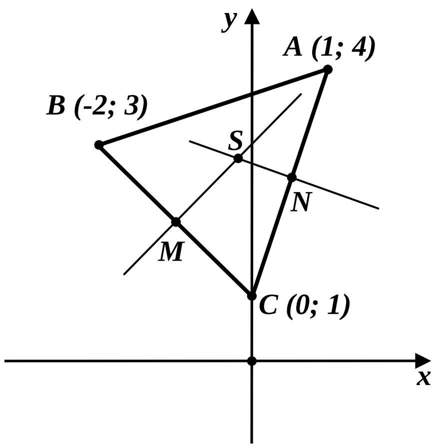
$$\begin{cases} y = x+3 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x+3 = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 3x+9 = -x+7 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 4x = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = x+3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'ortocentro ha pertanto coordinate: $T\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Esercizio 12

Determinare il circocentro del triangolo avente vertici in A (1 ; 4) , B (– 2 ; 3) , C (0 ; 1).

Soluzione



Il circocentro di un triangolo è il punto di incontro dei tre assi.

Determiniamo il punto medio M del lato BC:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= = \frac{x_B + x_c}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1\,; \\ y_M &= = \frac{y_B + y_c}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \end{aligned}\right\} \; H\,(-1\,;\,2)$$

Determiniamo il coefficiente angolare della retta BC:

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{0+2} = -1$$

Determiniamo l'equazione dell'asse del lato BC:

$$y - y_M = -\frac{1}{m_{BC}} \cdot (x - x_M)\ ; \quad y - 2 = 1 \cdot (x+1)\ ; \quad y - 2 = x+1\ ; \quad y = x+3\,.$$

Determiniamo il punto medio N del lato AC:

$$\left.\begin{aligned} x_N &= = \frac{x_A + x_c}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}\,; \\ y_N &= = \frac{y_A + y_c}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}\right\} \; N\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$$

Determiniamo il coefficiente angolare della retta AC:

$$m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{1-0} = 3 .$$

Determiniamo l'equazione dell'asse del lato AC:

$$y - y_N = -\frac{1}{m_{AC}} \cdot (x - x_N) \; ; \quad y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) \; ; \quad y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{3} x + \frac{1}{6} \; ; \quad y = -\frac{1}{3} x + \frac{8}{3}$$

Determiniamo le coordinate del circocentro S, punto incontro dei due assi:

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -\frac{1}{3} x + \frac{8}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x + 3 = -\frac{1}{3} x + \frac{8}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 3x + 9 = -x + 8 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ 4x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 3 = -\frac{1}{4} + 3 = \frac{11}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Il circocentro ha pertanto coordinate: $S\left(-\frac{1}{4} ; \frac{11}{4} \right)$.

Esercizio 13

L'incentro di un triangolo è il punto di incontro delle tre bisettrici.

Esercizi da svolgere

Esercizio 1 – *In ogni triangolo il baricentro divide ogni mediana in due parti, una delle quali è doppia dell'altra. Verifica tale proprietà per il triangolo di vertici A (-1; -1) , B (3; 6) , C (5; 1) .*

Esercizio 2 – *In ogni triangolo il baricentro, il circocentro e l'ortocentro sono allineati. Verifica tale proprietà per il triangolo di vertici A (1; -1) , B (3; 5) , C (6; 1) .*

Esercizio 3 – *In ogni triangolo il baricentro G, il circocentro E e l'ortocentro H sono tali che HG = 2·GE. Verifica tale proprietà per il triangolo di vertici A (-1; -1) , B (3; 5) , C (6; 1) .*

Esercizio 4 – *In ogni triangolo il segmento congiungente i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà. Verifica tale proprietà per il triangolo di vertici A (-3; 0) , B (3; 5) , C (6; 1) .*

Esercizio 5 – *In ogni triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa. Verifica tale proprietà per il triangolo di vertici A (0; 0) , B (4; 6) , C (12; -8) .*

Esercizio 6 – *In ogni trapezio la congiungente i punti medi dei lati non paralleli è parallela alle basi e congruente alla loro semisomma. Verifica tale proprietà per il trapezio di vertici A (0; 0) , B (4; 6) , C (13; 0) , D (12; -8).*

Esercizio 7 – *In ogni parallelogramma la somma dei quadrati delle lunghezze dei quattro lati è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze delle sue diagonali.*

Esercizio 8 – *Determina l'area del triangolo individuato dalle rette di equazione* $x - y = 0$, $2x - 3y = 0$, $x - 2y + 1 = 0$.

Esercizio 9 – *Dati tre vertici consecutivi di un parallelogramma A (1; 2) , B (5; 4) , C (7; 7), determina il quarto vertice, il perimetro e l'area del parallelogramma.* [D (3 ; 5) , $2\cdot\left(2\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)$, 8]