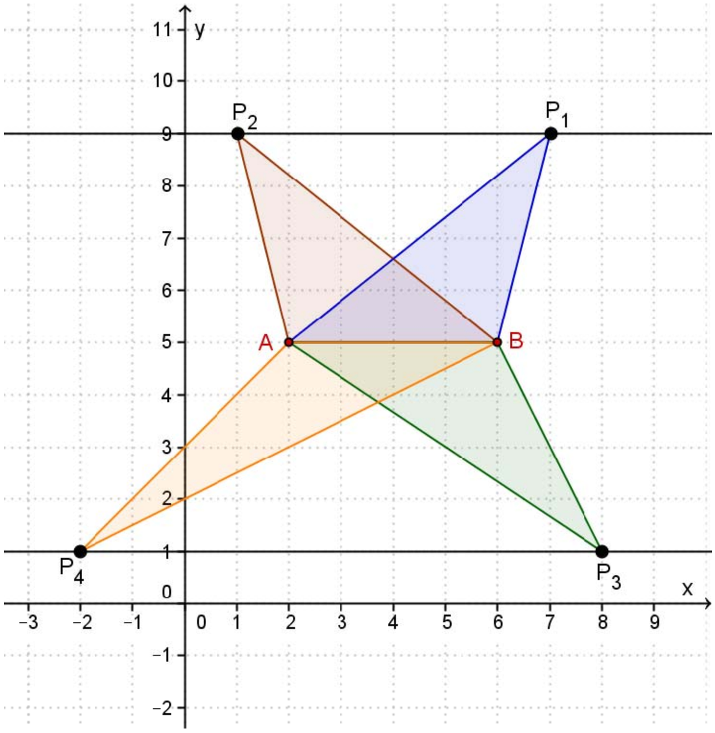
Luoghi geometrici

Esercizio 218.395

Dati i punti $A(2\,;\ 5)$ e $B(6\,;5)$, determina il luogo dei punti P tali che l'area del triangolo ABP sia 8.



Soluzione 1

Dalla rappresentazione grafica del problema si deduce che:

Essendo la base del triangolo uguale a 4, affinchè l'area misuri 8, l'altezza di questi triangoli deve essere 4.

Essendo la base del triangolo parallelo all'asse x, i vertici dei triangoli avente area 8 si trovano su due rette parallele agli assi a distanza 4 dalla base.

Soluzione 2

Risoviamo il problema per via algebrica.

Poniamo le coordinate del punto $P(h\,;k)$

Imponiamo che: $S_{ABC} = 8\,;$

$$\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ h & k & 1 \end{vmatrix}\right| = 8\,; \qquad \left|\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ h & k & 1 \end{vmatrix}\right| = 16\,;$$

$$|10 + 5h + 6k - (5h + 2k + 30)| = 16\,; \qquad |4k - 20| = 16\,;$$

$$|4k - 20| = 16\,; \qquad \begin{matrix} 4k - 20 = -16 \\ 4k - 20 = +16 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} k = 1 \\ k = 9 \end{matrix}$$

Pertanto il terzo vertice del triangolo ha coordinate: $P_1(h\,;1) \quad \vee \quad P_2(h\,;9)$.

Utilizzando le equazioni parametriche si ha:

$$\begin{cases} x = h \\ y = 1 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x = h \\ y = 9 \end{cases}$$

Esercizio 218.399

Determina l'equazione del luogo descritto dal punto $P\left(2k+3\,;1-\frac{k}{2}\right)$ al variare di k.

Soluzione

Le equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = 2k+3 \\ y = 1-\dfrac{k}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ k = 2-2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2(2-2y)+3 \\ - \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad x = 4-4y+3$$

$x+4y-7=0$.

Esercizio 218.400

Determina l'equazione del luogo descritto dal punto $P\left(\frac{k-4}{3}\ \ ;\ \ 2|k|+8\right)$ al variare di k.

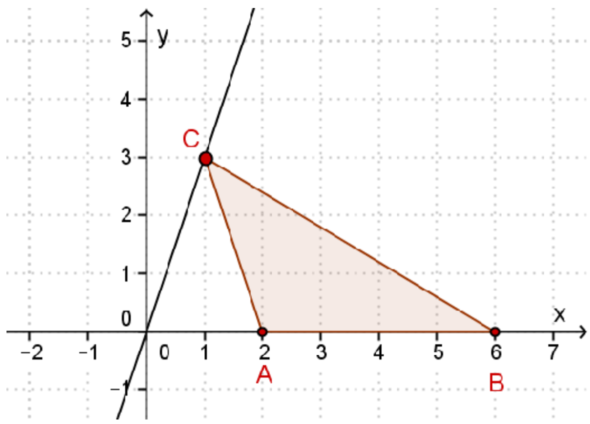
Soluzione

Le equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k-4}{3} \\ y = 2|k|+8 \end{cases} \qquad \begin{cases} k = 3x+4 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ y = 2|3x+4|+8 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad y = 2|3x+4|+8$$

Esercizio 218.405

Considera il triangolo ABC con $A(2\,;\ 0)$ e $B(6\,;0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y=3x$. Trova l'equazione del luogo geometrico descritto, al variare di C, dal baricentro G di ABC. Quando il triangolo è isoscele, quali sono le coordinate di C e di G?



Soluzione

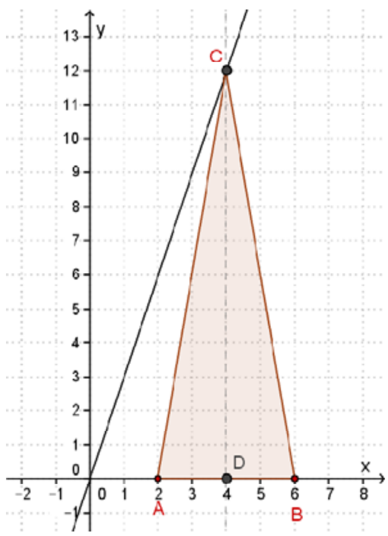
Il punto C variabile sulla retta di equazione $y=3x$ ha coordinate $C(k\ ;\ 3k)$

Il baricentro G ha coordinate:

$$\begin{cases} x = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{2+6+k}{3} \\ y = \frac{0+0+3k}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{8+k}{3} \\ y = k \end{cases}$$

Eliminando il parametro K si ottiene:

$$\begin{cases} - \\ k = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{8+y}{3} \\ - \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad 3x-y-8=0$$



Il triangolo ABC risulta isoscele quando l'ascissa del vertice C è uguale all'ascissa del punto medio della base AB.

Essendo: $x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_C = 4.$

Siccome il punto C appartiene alla retta $y=3x \ \Rightarrow\ y_C = 3\cdot 4 = 12 \ \Rightarrow C(4\,;12)$

Mentre le coordinate del baricentro G sono:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} = \dfrac{2+6+4}{3} = 4 \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} = \dfrac{0+0+12}{3} = 4 \end{cases}$$

Esercizio 218.406

Determina il luogo geometrico descritto dal baricentro del triangolo di vertici $A(2\,;k-3)$, $B(2k+1\,;6)$, $C(-5k+1\ ;\ 2k)$ al variare di k.

<u>*Soluzione*</u>

Il baricentro G ha coordinate:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2 + 2k + 1 - 5k + 1}{3} \\ y = \dfrac{k - 3 + 6 + 2k}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-3k + 4}{3} \\ y = \dfrac{3k + 3}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-3k + 4}{3} \\ y = k + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ k = y - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-3(y-1) + 4}{3} \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-3y + 3 + 4}{3} \\ - \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad 3x + 3y - 7 = 0\ .$$