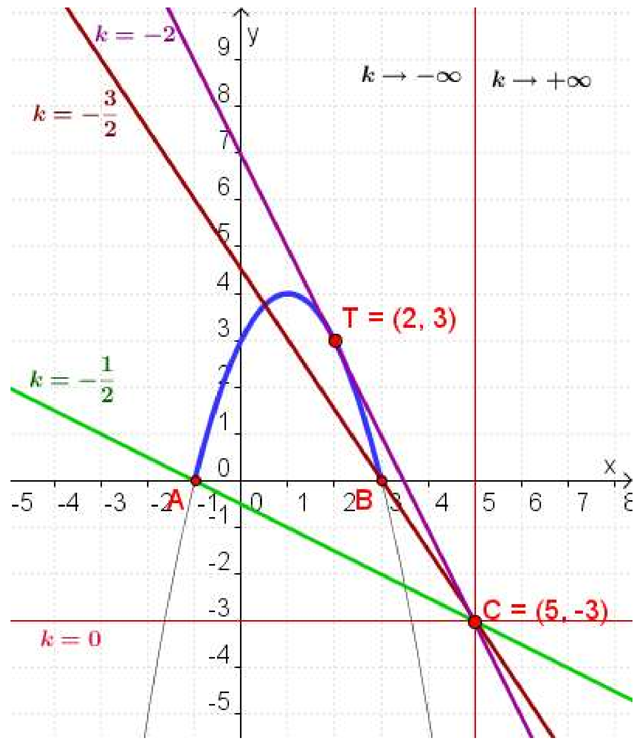
SISTEMI PARAMETRICI

ESERCIZI

Esercizio 333.573

Risolvi il seguente sistema parametrico con il metodo grafico.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ kx - y - 3 - 5k = 0 \\ -1 \le x \le 3 \end{cases}$$



Soluzione

Tracciamo il grafico della parabola: $y = -x^2 + 2x + 3$.

e consideriamo l'arco della parabola con $-1 \le x \le 3$ *che ha per estremi i punti* $A\,(-1\,;0)$ *e* $B\,(3\,;0)$.

Studiamo il fascio di rette: $kx - y \quad 3 - 5k = 0$.

Riscriviamo il fascio come combinazione lineare:

$-y - 3 + k \cdot (x - 5) = 0$.

Si tratta di un fascio di rette proprio, le cui rette generatrici sono:

per $k = 0$ $\qquad y + 3 = 0$

$\nexists k \in R\,,\ \ k \to \infty$ $\qquad x - 5 = 0$

Il centro del fascio è :

$$\begin{cases} x - 5 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = +5 \\ y = -3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C(5\,;-3)$$

Determiniamo la retta del fascio passante per il Punto $A\,(-1\,;0)$ *:*

$$kx - y - 3 - 5k = 0\,; \qquad k \cdot (-1) - 0 - 3 - 5k = 0\,; \qquad -6k = 3\,; \qquad k = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Determiniamo la retta del fascio passante per il Punto $B\,(3\,;0)$ *:*

$$kx - y - 3 - 5k = 0\,; \qquad k \cdot (3) - 0 - 3 - 5k = 0\,; \qquad -2k = 3\,; \qquad k = -\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}.$$

Determiniamo la retta del fascio tangente alla parabola nel punto T risolvendo il sistema fra le due curve e imponendo la condizione di tangenza :

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ kx - y - 3 - 5k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ kx + x^2 - 2x - 3 - 3 - 5k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ x^2 + (k-2)x - 6 - 5k = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0\,; \qquad (k-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6 - 5k) = 0\,; \qquad k^2 + 4 - 4k + 24 + 20k = 0\,; \qquad k^2 + 16k + 28 = 0$$

$$k_{1,2} = -8 \mp \sqrt{64 - 28} = -8 \mp \sqrt{36} = -8 \mp 6 = \begin{matrix} k_1 = -14 \\ k_2 = -2 \end{matrix}$$

Dal grafico si nota che la retta tangente alla parabola nel punto T si ottiene per $k_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 7$.

Dall'analisi del grafico si ottiene che le rette del fascio, al crescere di k, ruotano intorno al centro C del fascio in senso antiorario, a partire dalla retta $x - 5 = 0$.

Determiniamo adesso il numero delle soluzioni al variare di $k \in R$.

Per $k = -2$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ *due soluzioni coincidenti (retta passante per T)*

Per $-2 < k < -\frac{3}{2}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ *due soluzioni distinte*

Per $k = -\frac{3}{2}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ *due soluzioni distinte*

Per $-\frac{3}{2} < k < -\frac{1}{2}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ *una soluzione*

Per $k = -\frac{1}{2}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ *una soluzione*

Riassumendo:

Per $-2 \leq k \leq -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ *due soluzioni*

Per $-\frac{3}{2} < k \leq -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ *una soluzione*