PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO

ESERCIZI

Esercizio 330.556

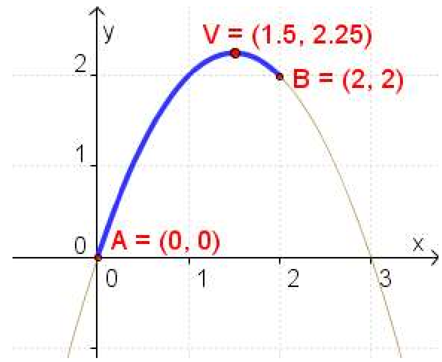
Determina il massimo e il minimo della funzione $y = -x^2 + 3x$ nell'intervallo $[0\,;2]$.

<u>*Soluzione*</u>

Disegniamo inizialmente il grafico della parabola : $y = -x^2 + 3x$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\cdot(-1)} = \frac{3}{2}$$

$$y_V = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{2} = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$$



Determiniamo le ordinate dei punti della parabola che sono alle estremità dell'intervallo $[0\,;2]$.

$f(0) = -0^2 + 3\cdot 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A\,(0\,;0)$

$f(2) = -2^2 + 3\cdot 2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad B\,(2\,;2)$

In seguito evidenziamo l'arco della parabola compreso nell'intervallo interessato $0 \le x \le 2$.

Analizziamo il grafico e determiniamo il valore minimo e il valore massimo dell'arco della parabola compreso nell'intervallo $0 \le x \le 2$.

Il minimo della funzione è: $y_{MIN} = 0$ *che si ottiene per* $x = 0$.

Il massimo della funzione è: $y_{MAX} = \frac{9}{4}$ *che si ottiene per* $x = \frac{3}{2}$.

Esercizio 330.557

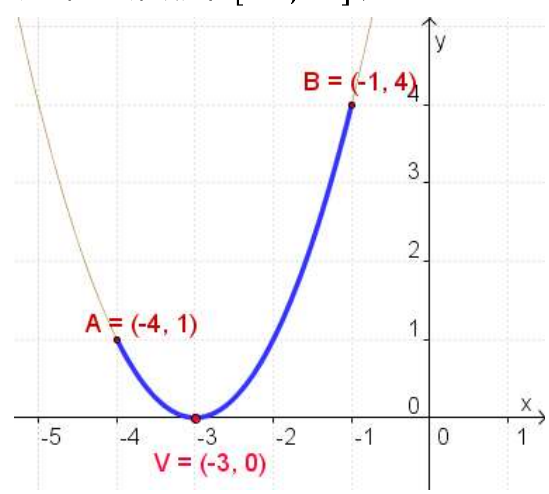
Determina il massimo e il minimo della funzione $y = x^2 + 6x + 9$ nell'intervallo $[-4\,;-1]$.

<u>*Soluzione*</u>

Disegniamo inizialmente il grafico della parabola: $y = x^2 + 6x + 9$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\cdot 1} = -3$$

$$y_V = (-3)^2 + 6\cdot(-3) + 9 = 0 \ .$$



Determiniamo le ordinate dei punti della parabola che sono alle estremità dell'intervallo $[-4\,;-1]$.

$f(-4) = (-4)^2 + 6\cdot(-4) + 9 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A\,(-4\,;1)$

$f(-1) = (-1)^2 + 6\cdot(-1) + 9 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad B\,(-1\,;4)$

In seguito evidenziamo l'arco della parabola compreso nell'intervallo interessato $-4 \le x \le -1$.

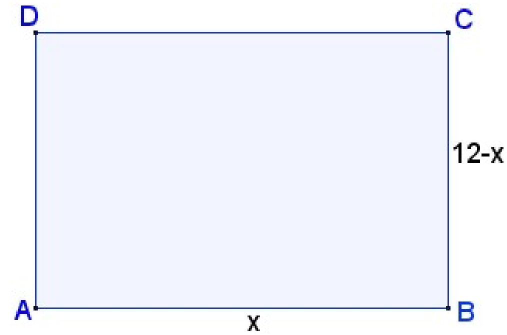
Analizziamo il grafico e determiniamo il valore minimo e il valore massimo dell'arco della parabola compreso nell'intervallo $-4 \le x \le -1$.

Il minimo della funzione è: $y_{MIN} = 0$ *che si ottiene per* $x = -3$.

Il massimo della funzione è: $y_{MAX} = 4$ *che si ottiene per* $x = -1$.

Esercizio 330.560

Determina il rettangolo di area massima avente perimetro 24 cm.



<u>Soluzione</u>

Si pone $\overline{AB} = x$ *si ottiene:* $\overline{BC} = 12 - x$ *con* $0 \leq x \leq 12$

La funzione che esprime l'area del rettangolo ABCD è :

$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$;

$y = x \cdot (12 - x)$;

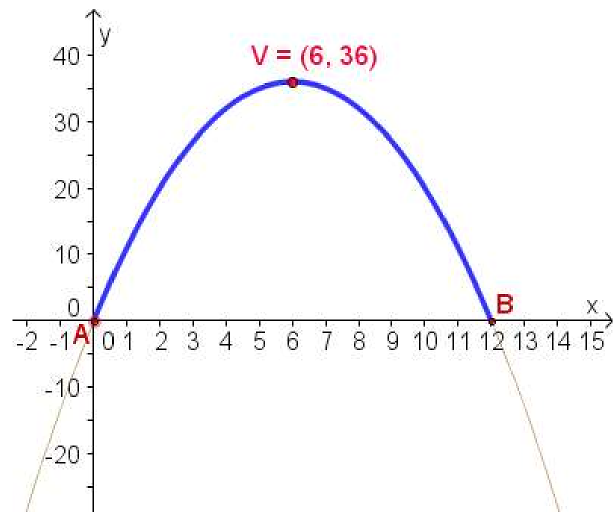
$y = -x^2 + 12x$.

Trattandosi di una parabola con concavità negativa,

il valore massimo si ottiene per $x = x_V$.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2 \cdot (-1)} = 6 \ .$$

Il valore massimo è : $y_{MAX} = y_V = -6^2 + 12 \cdot 6 = 36$.



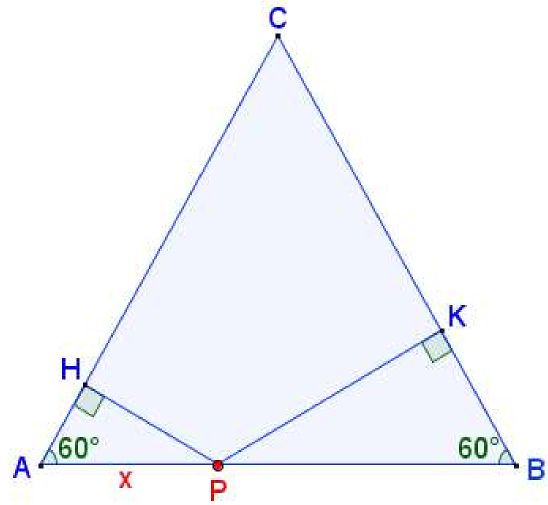
Da notare che per $x = 6$ *si ottiene:*

$\overline{AB} = x = 6$ *e* $\overline{BC} = 12 - 6 = 6$.

Pertanto, il rettangolo di area massima è un quadrato di lato 6 .

Esercizio 330.561

In un triangolo equilatero ABC di lato 6 considera sul lato AB un punto P, ed esprimi in funzione di $\overline{AP} = x$ il prodotto delle distanze di P dai lati AC e BC. Rappresenta la funzione ottenuta e determina il valore massimo.



Soluzione

Si pone $\overline{AP} = x$, *con* $0 \le x \le 6$

Si ottiene: $\overline{AH} = \frac{x}{2}$

$\overline{PB} = 6 - x$ *e* $\overline{BK} = \frac{6-x}{2}$

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \, .$$

$$\overline{PK} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{BK}^2} = \sqrt{(6-x)^2 - \left(\frac{6-x}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{36 + x^2 - 12x - \frac{36 + x^2 - 12x}{4}} = \sqrt{\frac{144 + 4x^2 - 48x - 36 - x^2 + 12x}{4}} = \sqrt{\frac{108 + 3x^2 - 36x}{4}} =$$

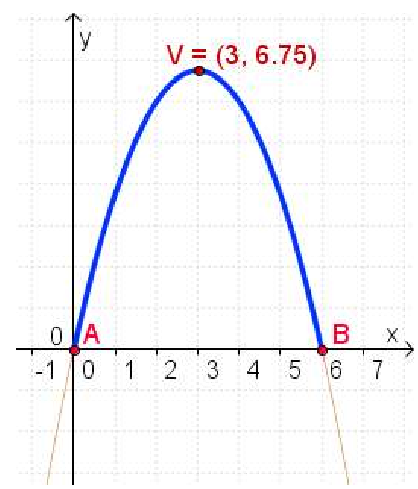
$$= \sqrt{\frac{3 \cdot (36 + x^2 - 12x)}{4}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (6-x)^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(6-x) \qquad essen \qquad 6 - x \ge 0 \quad \forall x \in [0\,,6] \, .$$

Oppure applicando la formula: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \quad \Rightarrow \quad \overline{PK} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{PB} = \frac{\sqrt{3}}{2}(6-x)$.

La funzione prodotto è :

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(6-x) \, ; \qquad y = \frac{3}{4}x \cdot (6-x) \, ;$$

$$y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x \, .$$



Trattandosi di una parabola con concavità negativa, il valore massimo si ottiene per $x = x_V$.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{9}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} = 3 \, .$$

Il valore massimo è :

$$y_{MAX} = y_V = -\frac{3}{4} \cdot 3^2 + \frac{9}{2} \cdot 3 = -\frac{3}{4}9 + \frac{9}{2} \cdot 3 = -\frac{27}{4} + \frac{27}{2} = \frac{27}{4} \, .$$

Esercizio 330.562

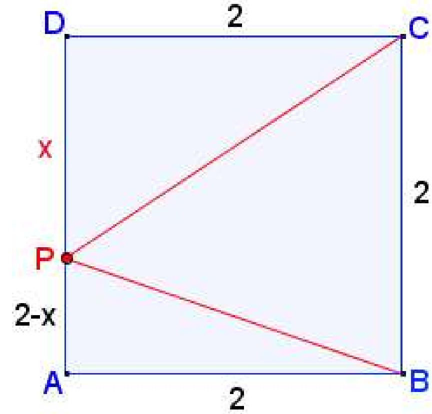
Nel quadrato *ABCD* di lato 2 congiungi un punto *P* del lato *AD* con i vertici *B* e *C*. Determina, al variare di $\overline{PD}$, la funzione $y = \overline{PB}^{\,2} + \overline{PC}^{\,2} + \overline{BC}^{\,2}$ e rappresentala graficamente, determinando il suo valore minimo.

<u>*Soluzione*</u>

Si pone $\overline{PD} = x$ *si ottiene:* $\overline{AP} = 2 - x$ *con* $0 \le x \le 2$

$\overline{PB} = \sqrt{2^2 + (2-x)^2} = \sqrt{4 + 4 + x^2 - 4x} = \sqrt{8 + x^2 - 4x}$

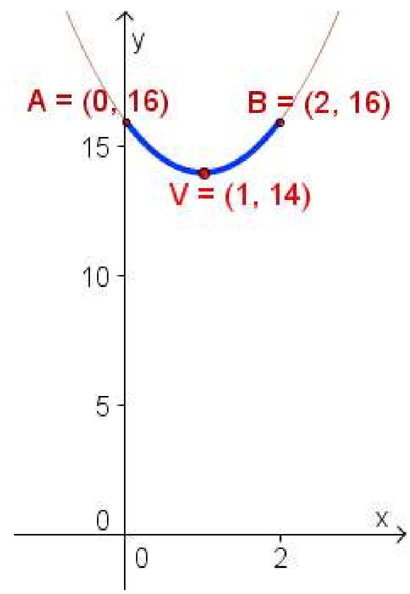
$\overline{PC} = \sqrt{2^2 + x^2} = \sqrt{4 + x^2}$



La funzione $y = \overline{PB}^{\,2} + \overline{PC}^{\,2} + \overline{BC}^{\,2}$ *è :*

$y = 8 + x^2 - 4x + 4 + x^2 + 2^{\,2}$

$y = 2x^2 - 4x + 16$



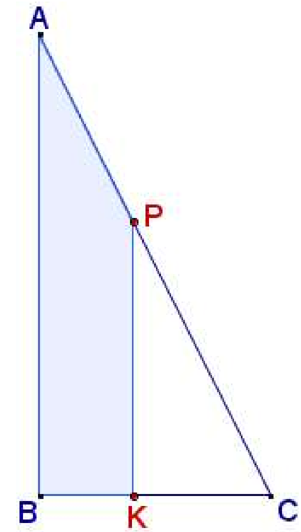
Trattandosi di una parabola con concavità positiva,
il valore minimo si ottiene per $x = x_V$.

$x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot 2} = 1$.

Il valore massimo è : $y_{MAX} = y_V = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 16 = 14$.

Esercizio 330.563

Nel triangolo rettangolo ABC l'ipotenusa AC misura 8 e il cateto BC è la metà di AC . Considerato un punto P su AC e la sua proiezione K su BC, esprimi in funzione di $\overline{PC}$ l'area del quadrilatero $BAPK$. Rappresenta il grafico della funzione ottenuta e trova per quale posizione di P l'area di $BAPK$ è la metà di quella di ABC.



Soluzione

Si pone $\overline{PC} = x$, *con* $0 \leq x \leq 8$.

Dalla similitudine dei triangoli ABC e AKP si ottiene:

$\overline{AC} : \overline{PC} = \overline{BC} : \overline{KC}$; $\quad 8 : x = 4 : \overline{KC}$; $\quad \overline{KC} = \dfrac{x}{2}$.

Si ottiene inoltre : $\overline{BK} = 4 - \frac{x}{2}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^{\,2} - \overline{BC}^{\,2}} = \sqrt{8^{\,2} - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} .$$

$$\overline{PK} = \sqrt{\overline{PC}^{\,2} - \overline{KC}^{\,2}} = \sqrt{x^{\,2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^{\,2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x .$$

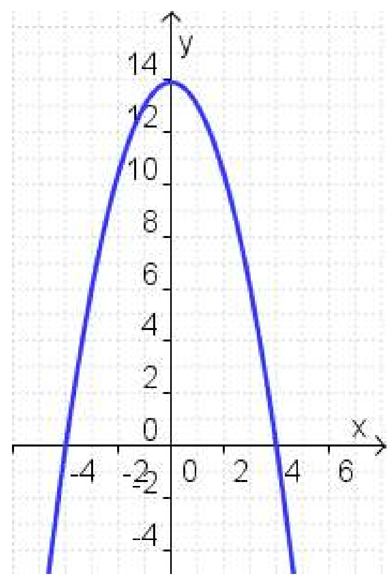
La funzione che esprime l'area del quadrilatero BAPK è :

$$S_{BAPK} = \frac{\overline{AB} + \overline{PK}}{2} \cdot \overline{BK}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(4\sqrt{3} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \left(4 - \tfrac{x}{2}\right) ;$$

$$y = 8\sqrt{3} - \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 ;$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + 8\sqrt{3} \quad .$$



L'area del triangolo ABC è :

$$S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \ .$$

Si impone che l'area di BAPK sia la metà di quella di ABC .

$$-\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + 8\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \ ; \qquad -\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 + 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \ ;$$

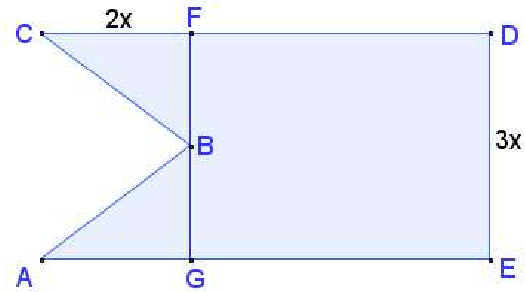
$$\frac{\sqrt{3}}{8}x^2 = 4\sqrt{3} \ ; \qquad x^2 = 32 ;$$

$$x_{1,2} = \mp\sqrt{32} = \begin{matrix} x_1 = -4\sqrt{2} \\ x_2 = +4\sqrt{2} \end{matrix} \qquad \textit{non accettabile}$$

La posizione del punto P è quella per la quale $\overline{PC} = 4\sqrt{2}$.

Esercizio 330.564

La figura colorata ha perimetro di $40\,cm$. Che valore deve assumere x perché l'area sia massima?



<u>Soluzione</u>

Dall'analisi del grafico si ha: $\overline{BF} = \frac{3}{2}x$.

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CF}^2 + \overline{BF}^2} = \sqrt{4x^2 + \frac{9}{4}x^2} = \sqrt{\frac{25}{4}x^2} = \frac{5}{2}x \,.$$

$$\overline{GE} = \frac{1}{2}(40 - 2\,\overline{CF} - 2\,\overline{BC} - \overline{ED}) \;=\; \frac{1}{2}(40 - 4x - 5x - 3x) \;=\; \frac{1}{2}(40 - 12x) \;=\; 20 - 6x \;.$$

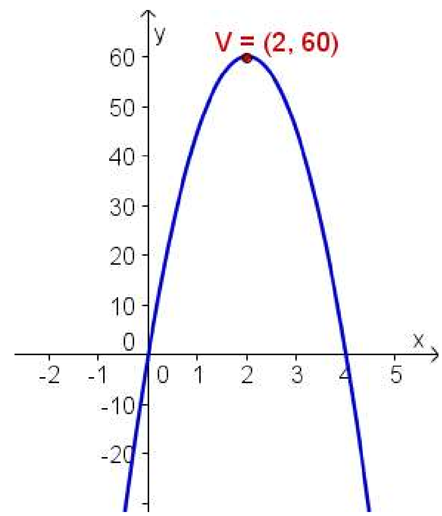
La funzione che esprime l'area della figura è :

$S \;=\; 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{CF} \cdot \overline{BF} + \overline{GE} \cdot \overline{DE}$;

$y = \; 2x \cdot \frac{3}{2}x + (20 - 6x\;) \cdot 3x$;

$y = 3x^2 + 60x - 18x^2$;

$y = -15x^2 + 60x$



Trattandosi di una parabola con concavità negativa,
il valore massimo si ottiene per $x = x_V$.

$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{60}{2 \cdot 15} = 2$.

Il valore massimo è : $\;\; y_{MAX} = y_V = -15 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 = 60$.