PARABOLA

ESERCIZI

Esercizio 295.154

Traccia il grafico della funzione: $y - |-x^2 + 3|x|\,|$

Soluzione

Riscriviamo la funzione in forma esplicita: $y = |\,-x^2 + 3|x|\,|$

Essendo la funzione del tipo $y = |f(x)|$ *, risulta conveniente tracciare prima il grafico della funzione* $y = f(x)$ *ed in seguito simmetrizzare rispetto all'asse x la zona del grafico con ordinata negativa.*

Pertanto, tracciamo inizialmente il grafico della funzione:

$y = x^2 + 3|x|$

Applicando la definizione di valore assoluto otteniamo la seguente esplicitazione della funzione:

$$y = -x^2 + 3|x| = \begin{cases} -x^2 + 3x & se\ \ x \geq 0 \\ -x^2 - 3x & se\ \ x < 0 \end{cases}$$

Tracciamo l'arco di parabola $y = -x^2 - 3x$ *contenuto nel semipiano* $x < 0$.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\cdot(-1)} = -\frac{3}{2}$$
$$y_V = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{4} \qquad \Rightarrow \qquad V_1\left(-\frac{3}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right)$$

La parabola interseca l'asse x nei punti $A\,(-3\ ;\ 0)$ *e* $O\,(0\ ;\ 0)$. *Infatti:*

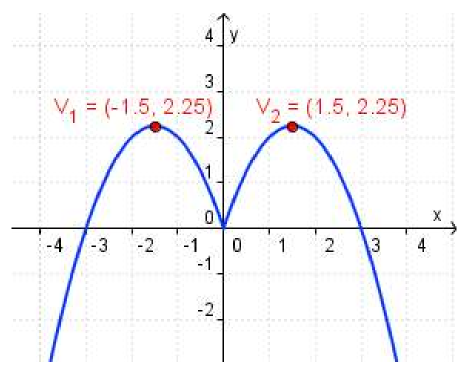
$$\begin{cases} y = -x^2 - 3x \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 3x = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x\cdot(x+3) = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$$

Tracciamo l'arco di parabola $y = -x^2 + 3x$ *contenuto nel semipiano* $x \geq 0$.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\cdot(-1)} = \frac{3}{2}$$
$$y_V = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{3}{2} = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{4} \qquad \Rightarrow \qquad V_1\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right)$$

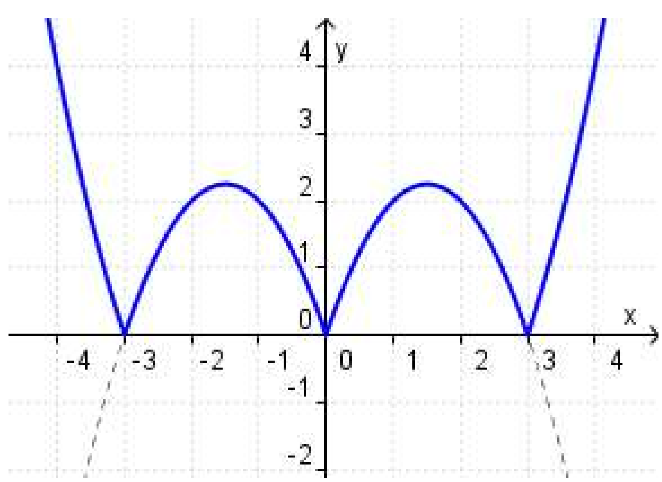
La parabola interseca l'asse x nei punti $A\,(3\ ;\ 0)$ *e* $O\,(0\ ;\ 0)$. *Infatti:*

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x\cdot(x-3) = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$$



Si ottiene il grafico a lato.

Infine simmetrizzando rispetto all'asse x la zona del grafico con ordinata negativa, si ottiene il grafico della funzione: $y = |\,-x^2 + 3|x|\,|$



Esercizio 296.187

Traccia il grafico della funzione: $x = 1 + \sqrt{y - 3}$

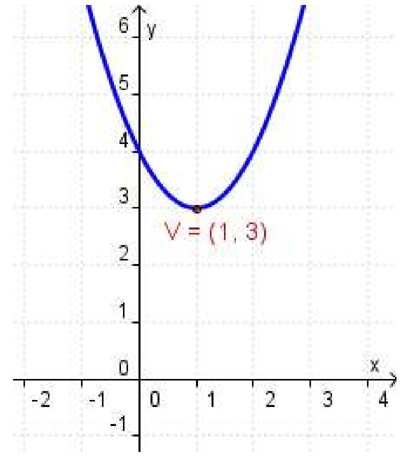
<u>*Soluzione*</u>

Il dominio della funzione è $D = \{y \in R \mid y \geq 3\}$.

Isolando il radicale si ottiene la seguente equazione: $x - 1 = \sqrt{y - 3}$.

Essa è equivalente a :

$\begin{cases} (x-1)^2 = y - 3 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = y - 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$



Tracciamo il grafico della parabola $y = x^2 - 2x + 4$

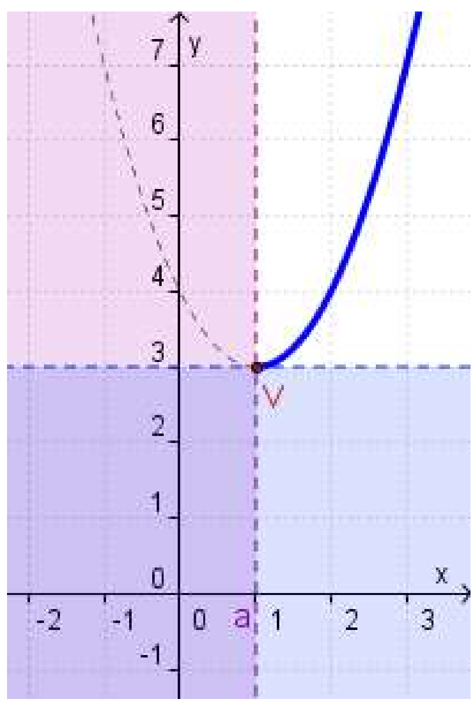
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad V\,(1\,;\;3)\ .$$
$$y_V = (1)^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$$

La parabola non interseca l'asse x .

$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x + 4 = 0 \\ --- \end{cases}$ $\begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3} \\ --- \end{cases}$

Mentre interseca l'asse y nel punto $A\,(0\,;4)$

Ricordando il dominio della funzione $D = \{y \in R \mid y \geq 3\}$ *e la condizione* $x \geq 1$ *si ottiene il seguente grafico:*



Esercizio 297.194

Traccia il grafico della funzione: $y = 1 + \sqrt{|x-1| - 2}$

Soluzione

La funzione può essere studiata esplicitandola nel seguente modo:

$$y = 1 + \sqrt{|x-1| - 2} \ = \ \begin{cases} 1 + \sqrt{x-1-2} & se \ \ x \geq 1 \\ 1 + \sqrt{-x+1-2} & se \ \ x < 1 \end{cases} \qquad \textit{cioè}$$

$$y = 1 + \sqrt{|x-1| - 2} \ = \ \begin{cases} 1 + \sqrt{x-3} & se \ \ x \geq 1 \\ 1 + \sqrt{-x-1} & se \ \ x < 1 \end{cases}$$

Tracciamo quindi, il grafico della funzione: $y = 1 + \sqrt{-x-1}$ *nel semipiano* $x < 1$.

Il dominio della funzione è $D = \{x \in R \ | \ x \leq -1\}$.

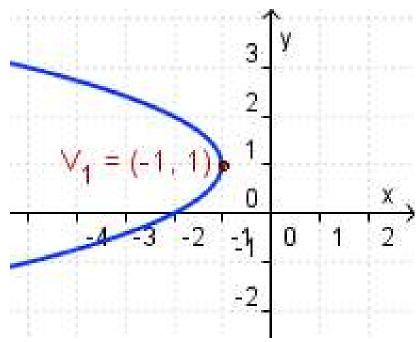
Isolando il radicale si ottiene la seguente equazione: $y - 1 = \sqrt{-x-1}$ *equivalente al sistema :*

$$\begin{cases} (y-1)^2 = -x-1 \\ y - 1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = -x - 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y^2 + 2y - 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Tracciamo il grafico della parabola $x = -y^2 + 2y - 2$

$$y_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad V\,(-1\,;\,1)\ .$$

$$x_V = -(1)^2 + 2 \cdot 1 - 2 = -1$$



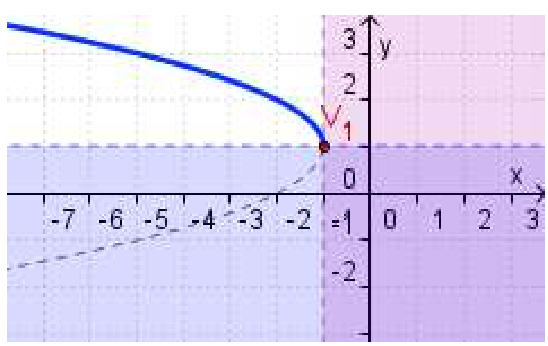
La parabola interseca l'asse x nel punto $A\,(-2\,;\,0)$.

Infatti: $\begin{cases} x = -y^2 + 2y - 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ - - - \end{cases}$

La parabola non interseca l'asse y .

Infatti: $\begin{cases} x = -y^2 + 2y - 2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - 2y + 2 = 0 \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} \\ - - - \end{cases}$

Ricordando il dominio della funzione $D = \{x \in R \ | \ x \leq -1\}$ *e la condizione* $y \geq 1$ *si ottiene il seguente grafico:*



Tracciamo il grafico della funzione: $y = 1 + \sqrt{x-3}$ *nel semipiano* $x \geq 1$

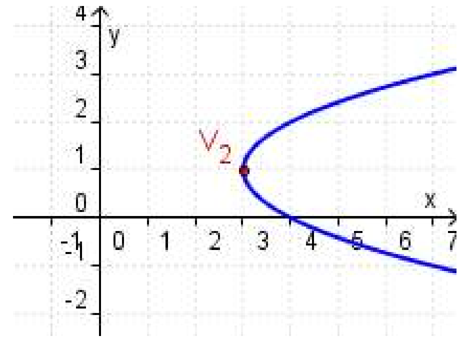
Il dominio della funzione è $D = \{x \in R \mid x \geq 3\}$.

Isolando il radicale si ottiene la seguente equazione: $y - 1 = \sqrt{x-3}$ *equivalente al sistema :*

$$\begin{cases}(y-1)^2 = x-3 \\ y-1 \geq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}y^2-2y+1 = x-3 \\ y \geq 1\end{cases} \qquad \begin{cases}x = y^2-2y+4 \\ y \geq 1\end{cases}$$

Tracciamo il grafico della parabola $x = y^2 - 2y + 4$

$$\begin{aligned} y_V &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2\cdot 1} = 1 \\ x_V &= 1^2 - 2\cdot 1 + 4 = 3 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad V\,(3\,;\,1)\ .$$



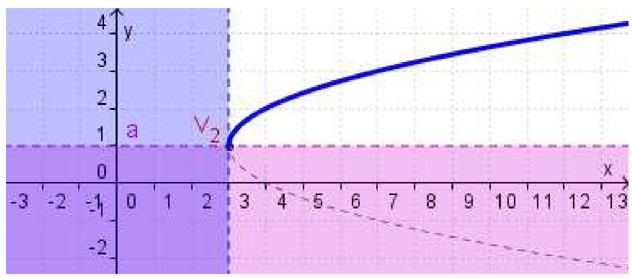
La parabola interseca l'asse x nel punto $A\,(4\,;\,0)$.

Infatti: $\begin{cases}x = y^2-2y+4 \\ y = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}x = 4 \\ ---\end{cases}$

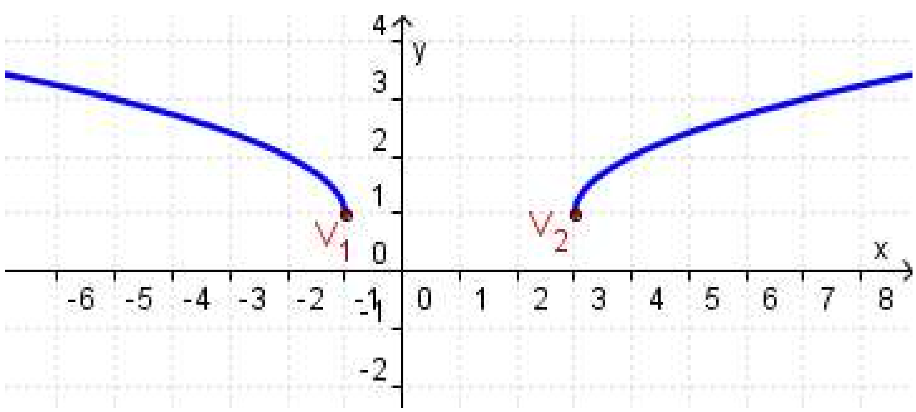
La parabola non interseca l'asse y .

Infatti: $\begin{cases}x = y^2-2y+4 \\ x = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}y^2-2y+4 = 0 \\ ---\end{cases} \qquad \begin{cases}x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-3} \\ ---\end{cases}$

Ricordando il dominio della funzione $D = \{x \in R \mid x \geq 3\}$ *e la condizione* $y \geq 1$ *si ottiene il seguente grafico:*



Concludendo, il grafico della funzione $y = 1 + \sqrt{|x-1| - 2}$ *è il seguente:*



Esercizio 327.539

Determina le equazioni delle parabole $y = ax^2 + bx + c$ aventi per vertice un punto di ordinata -9 e di ascissa la soluzione minore dell'equazione $t^4 - 11t^3 + 25t^2 - 11t + 24 = 0$ e che individuano sulla retta $x - y - 10 = 0$ un segmento AB di misura $3\sqrt{2}$. Calcola l'area del triangolo ABC, dove C è l'intersezione di ascissa positiva della parabola avente la concavità rivolta verso l'alto con l'asse delle x .

<u>*Soluzione*</u>

Risolviamo l'equazione:

$t^4 - 11t^3 + 25t^2 - 11t + 24 = 0$;

	1	-11	$+25$	-11	$+24$
$+3$		$+3$	-24	$+3$	-24
	1	-8	$+1$	-8	$=$

$(t - 3)(t^3 - 8t^2 + t - 8) = 0$

$(t - 3) \cdot [t^2 \cdot (t - 8) + 1 \cdot (t - 8)] = 0$;

$(t - 3)(t - 8)(t^2 + 1) = 0$; $\quad t - 3 = 0 \quad t = 3$; $\quad t - 8 = 0 \quad t = 8$; $\quad t^2 + 1 = 0 \quad \nexists x \in R$

Considerando la soluzione minore $t = 3$ *, il vertice ha coordinate:* $V\,(3\,;-9)$.

Utilizzando la conoscenza delle coordinate del vertice si ha:

$$\begin{cases} -9 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9a + 3b + c + 9 = 0 \\ b = -6a \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 9a - 9 \\ b = -6a \end{cases}$$

Si ottiene il seguente fascio di parabole: $y = ax^2 - 5ax + 9a - 9$.

Determiniamo le coordinate dei punti di intersezione di tale fascio con la retta $x - y - 10 = 0$.

$$\begin{cases} y = ax^2 - 5ax + 9a - 9 \\ x - y - 10 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = ax^2 - 5ax + 9a - 9 \\ y = x - 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 - (6a + 1)x + 9a + 1 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{A,B} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{6a + 1 \pm \sqrt{(6a + 1)^2 - 4a \cdot (9a + 1)}}{2a} = \dfrac{6a + 1 \pm \sqrt{8a + 1}}{2a} \\ --- \end{cases}$$

I punti A e B hanno coordinate:

$$A\left(\frac{6a + 1 - \sqrt{8a + 1}}{2a}\ ;\ \frac{1 - 14a - \sqrt{8a + 1}}{2a}\right) \qquad e \qquad B\left(\frac{6a + 1 + \sqrt{8a + 1}}{2a}\ ;\ \frac{1 - 14a + \sqrt{8a + 1}}{2a}\right)$$

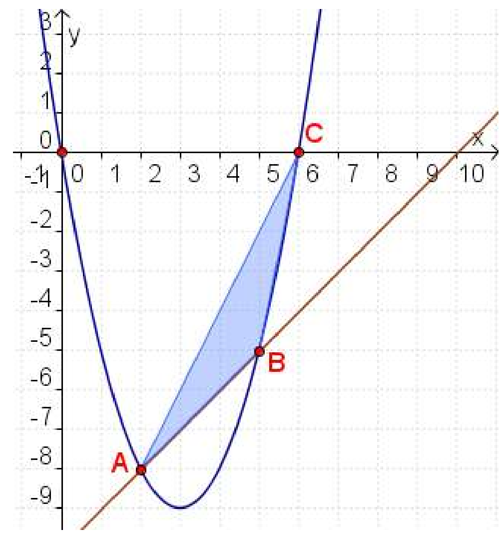
$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{6a + 1 + \sqrt{8a + 1}}{2a} - \frac{6a + 1 - \sqrt{8a + 1}}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1 - 14a + \sqrt{8a + 1}}{2a} - \frac{1 - 14a - \sqrt{8a + 1}}{2a}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{8a + 1}}{2a}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{8a + 1}}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{8a + 1}{a^2} + \frac{8a + 1}{a^2}} = \sqrt{\frac{16a + 2}{a^2}}\ .$$

Ma $\overline{AB} = 3\sqrt{2} \quad \Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{16a + 2}{a^2}} = 3\sqrt{2}\ ; \qquad \begin{cases} 3\sqrt{2} \geq 0 \\ \dfrac{16a + 2}{a^2} \geq 0 \\ \dfrac{16a + 2}{a^2} = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \in R \\ a \geq -\dfrac{1}{8} \quad condizione\ verificata\ nell'equazione\ seguente \\ \dfrac{16a + 2}{a^2} = 18 \end{cases}$$

$$\frac{16a + 2}{a^2} = 18\ ; \qquad 9a^2 - 8a - 1 = 0\ ; \qquad a_1 = -\frac{1}{9} \quad a_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_1:\ \ y = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x - 10 \qquad \gamma_2:\ \ y = x^2 - 6x$$



La parabola con la concavità rivolta verso l'alto è la parabola

γ_2: $y = x^2 - 6x$.

Determiniamo le intersezioni con l'asse x:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} C\ (6\ ;0) \\ D\ (0\ ;0) \end{matrix}$$

Determiniamo le coordinate dei punti A e B :

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = x - 10 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A\ (2\ ;\ -8) \\ B\ (5\ ;\ -5) \end{matrix}$$

L'area del triangolo ABC è :

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 2-5 & -8+5 \\ 6-5 & 0+5 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |-15 + 3\ | = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |-12\ | = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 12 = \\ &= 6\ . \end{aligned}$$

Esercizio 327.541

Determina l'equazione della parabola p_1: $y = x^2 - 4x + c$ tangente in un punto A alla parabola p_2 di equazione $y = -x^2 + 8x - 18$ e traccia le rette passanti per A e aventi coefficienti angolari -2 e -1. Siano B e C le intersezioni delle rette trovate con p_1 e D ed E quelle con p_2. Verifica che i triangoli ABC e AED sono congruenti e calcolane area e perimetro.

<u>*Soluzione*</u>

Determiniamo le intersezioni fra le due parabole:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + c \\ y = -x^2 + 8x - 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x + c = -x^2 + 8x - 18 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 12x + c + 18 = 0 \\ --- \end{cases}$$

Imponiamo la condizione di tangenza:

$$\frac{\Delta}{4} = 0\,; \qquad 36 - 2 \cdot (c + 18) = 0\,; \qquad 36 - 2c - 36 = 0\,; \qquad c = 0\,.$$

L'equazione della parabola p_1 *è :* $y = x^2 - 4x$.

Determiniamo le coordinate del punto A :

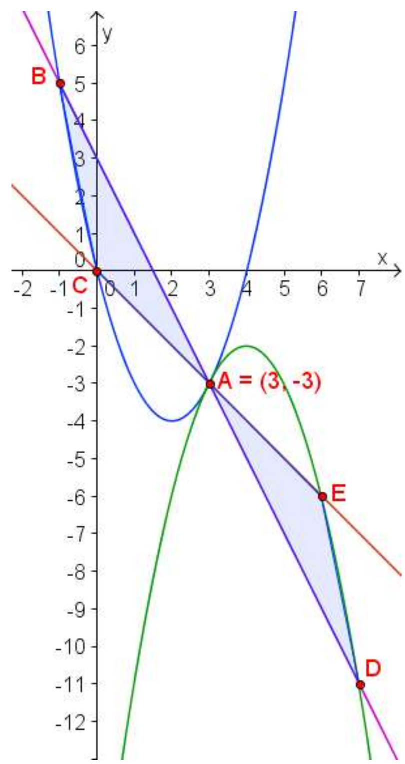
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x^2 + 8x - 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x = -x^2 + 8x - 18 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 12x + 18 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A\,(3\,;-3)$$

Le rette passanti per A e aventi coefficienti angolari -2 *e* -1 *hanno equazioni:*

$y - y_A = -2(x - x_A)\,;$ $\quad y + 3 = -2(x - 3)\,;$ $\quad y = -2x + 3$

$y - y_A = -1(x - x_A)\,;$ $\quad y + 3 = -1(x - 3)\,;$ $\quad y = -x$



Determiniamo le coordinate del punto B :

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x = -2x + 3 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{matrix} x_1 = 1 - 2 = -1 \\ x_2 = 1 + 2 = +3 \end{matrix} \\ y = -2x + 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} B\,(-1\,;5) \\ A\,(3\,;-3) \end{matrix}$$

Determiniamo le coordinate del punto C :

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x = -x \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-3) = 0 \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{matrix} \\ y = -x \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} C\,(0\,;0) \\ A\,(3\,;-3) \end{matrix}$$

Determiniamo le coordinate del punto D :

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 18 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x + 3 = -x^2 + 8x - 18 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 10x + 21 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = \begin{matrix} x_1 = 5 - 2 = 3 \\ x_2 = 5 + 2 = 7 \end{matrix} \\ y = -2x + 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} A\,(3\,;-3) \\ D\,(7\,;-11) \end{matrix}$$

Determiniamo le coordinate del punto E :

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 18 \\ y = -x \end{cases} \qquad \begin{cases} -x = -x^2 + 8x - 18 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 9x + 18 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \begin{matrix} x_1 = \dfrac{9-3}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{9+3}{2} = 6 \end{matrix} \\ y = -x \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} A\,(3\,;-3) \\ E\,(6\,;-6) \end{matrix}$$

Verifichiamo che i triangoli ABC e AED sono congruenti e determiniamo perimetro e area.

$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2+(-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

$\overline{BC} = \sqrt{(-1-0)^2+(5-0)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$.

$\overline{AC} = \sqrt{(3-0)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.

$p_{ABC} = 4\sqrt{5}+\sqrt{26}+3\sqrt{2}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot \left| \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\cdot \left| \begin{vmatrix} 3+1 & -3-5 \\ 0+1 & 0-5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\cdot \left| \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot |-20+8| = \frac{1}{2}\cdot |-12| = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6 .$$

$\overline{AD} = \sqrt{(7-3)^2+(-11+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

$\overline{DE} = \sqrt{(7-6)^2+(-11+6)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$.

$\overline{AE} = \sqrt{(6-3)^2+(-6+3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$.

$p_{ADE} = 4\sqrt{5}+\sqrt{26}+3\sqrt{2}$.

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\cdot \left| \begin{vmatrix} x_A - x_D & y_A - y_D \\ x_E - x_D & y_E - y_D \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\cdot \left| \begin{vmatrix} 3-7 & -3+11 \\ 6-7 & -6+11 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}\cdot \left| \begin{vmatrix} -4 & +8 \\ -1 & +5 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot |-20+8| = \frac{1}{2}\cdot |-12| = \frac{1}{2}\cdot 12 = 6 .$$

Esercizio 327.542

Determina le equazioni delle parabole $y = ax^2 + bx + c$, tangenti alle rette $2x - y - 5 = 0$ e $2x + y - 3 = 0$ e passanti per il punto P di ascissa 4 della retta $3x - 5y + 8 = 0$. Determina l'equazione della retta t tangente nel punto A di ascissa 3 alla parabola avente il vertice di ordinata minore e l'equazione della retta n normale alla stessa parabola in A e poi calcola l'area del triangolo formato da t, n, e dall'asse delle ascisse.

<u>*Soluzione*</u>

Determiniamo le intersezioni fra la parabola e la retta $2x - y - 5 = 0$ *:*

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 + bx + c \quad 2x - 5 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 + (b-2)x + c + 5 = 0 \\ --- \end{cases}$$

Imponiamo la condizione di tangenza:

$\Delta = 0$; $\qquad (b-2)^2 - 4a(c+5) = 0$; $\qquad b^2 + 4 - 4b - 4ac - 20a = 0$;

Determiniamo le intersezioni fra la parabola e la retta $2x + y - 3 = 0$ *:*

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 + bx + c = -2x + 3 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 + (b+2)x + c - 3 = 0 \\ --- \end{cases}$$

Imponiamo la condizione di tangenza:

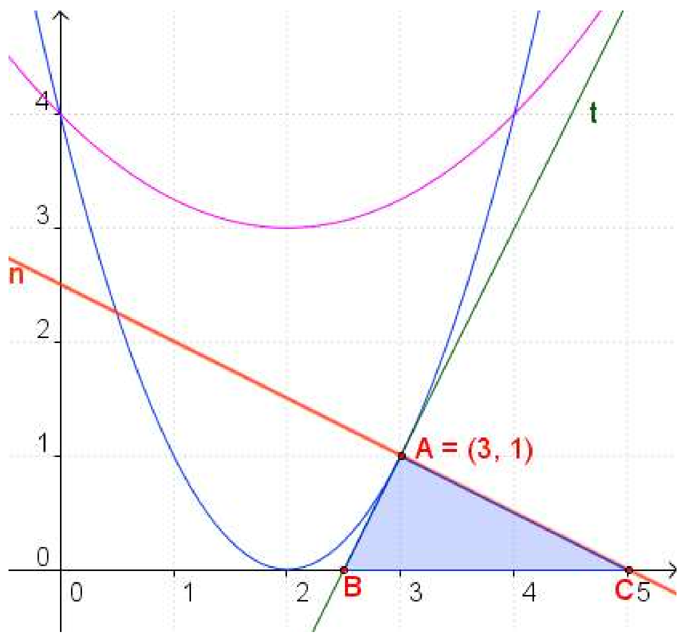
$\Delta = 0$; $\qquad (b+2)^2 - 4a(c-3) = 0$; $\qquad b^2 + 4 + 4b - 4ac + 12a = 0$;

Determiniamo l'ordinata del punto P :

$3 \cdot 4 - 5y + 8 = 0$; $\quad 5y = 12 + 8$; $\quad y = 4 \quad \Rightarrow \quad$ P $(4\,;4)$.

Imponiamo il passaggio per il punto P :

$4 = 16a + 4b + c$



Risolviamo il sistema formato dalle tre relazioni :

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 4 \\ b^2 + 4 + 4b - 4ac \quad 12a = 0 \\ b^2 + 4 - 4b - 4ac - 20a = 0 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di Riduzione (II equazione – III) :

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 4 \\ - \\ 8b + 32a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16a + 4 \cdot (-4a) + c = 4 \\ \\ b = -4a \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 4 \\ \\ b = -4a \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 + 4 + 4b - 4ac + 12a = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} --- \\ (-4a)^2 + 4 + 4(-4a) - 4a \cdot 4 + 12a = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} --- \\ 16a^2 + 4 - 16a - 16a + 12a = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} --- \\ 16a^2 - 20a + 4 = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ 4a^2 - 5a + 1 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ a_{1,2} = \dfrac{5 \mp \sqrt{25 - 16}}{2 \cdot 4} = \begin{matrix} a_1 = \dfrac{1}{4} \\ a_2 = 1 \end{matrix} \\ \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{4} \\ b_1 = -1 \\ c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \gamma_1 \quad y = \frac{1}{4}x^2 - x + 4$$

$$\begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = -4 \\ c_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad \gamma_2 \qquad y = x^2 - 4x + 4$$

Determiniamo l'ordinata del punto A :

$y_{\mathrm{A}} = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 \qquad \Rightarrow \qquad A\,(3\,;1)$.

Determiniamo l'equazione della retta t *tangente nel punto* A *alla parabola* $y = x^2 - 4x + 4$ *con la f. di sdoppiamento:*

$\frac{y+y_A}{2} = x_A \cdot x - 4\frac{x+x_A}{2} + 4\,; \qquad \frac{y+1}{2} = 3x - 4\frac{x+3}{2} + 4\,; \qquad y + 1 = 6x - 4x - 12 + 8\,; \qquad y = 2x - 5$.

Determiniamo l'equazione della retta n normale nel punto A *alla parabola* $y = x^2 - 4x + 4$ *:*

$y - y_A = -\dfrac{1}{m_t}(x - x_A)\,; \qquad y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 3)\,; \qquad y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$.

Determiniamo le coordinate del punto B :

$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad B\left(\dfrac{5}{2}\,;0\right)$

Determiniamo le coordinate del punto C :

$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C\,(5\,;0)$

Determiniamo l'area del triangolo ABC :

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot |x_c - x_B| \cdot y_A = \dfrac{1}{2} \cdot \left|5 - \dfrac{5}{2}\right| \cdot 1 = \dfrac{5}{4}$.

Esercizio 321.487

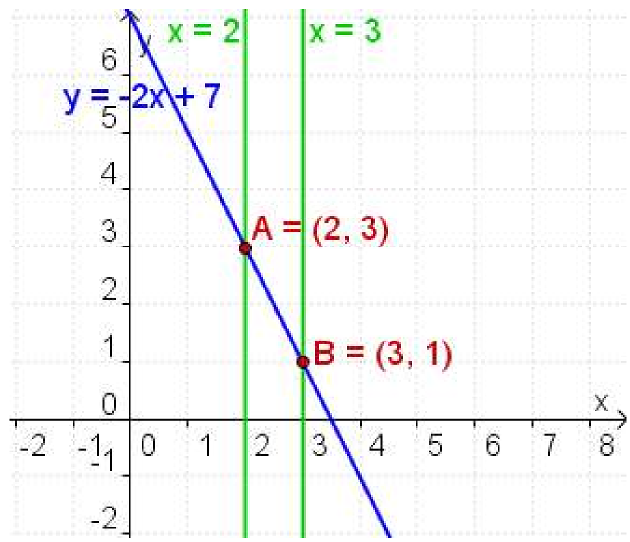
Scrivi l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A\ (2\ ;3)$ e $B\ (3\ ;1)$. Trova la parabola del fascio passante per l'origine.

<u>Soluzione</u>

L'equazione del fascio di parabole è dato dalla combinazione lineare delle equazioni delle due parabole degeneri:

- la retta passante per i punti A e B ;

- la coppia di rette parallele all'asse y passanti per i punti A e B .



L'equazione della retta AB è :

$\dfrac{y-y_B}{y_A-y_B}=\dfrac{x-x_B}{x_A-x_B}$; $\qquad \dfrac{y-1}{3-1}=\dfrac{x-3}{2-3}$;

$\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{x-3}{-1}$; $\qquad -1\cdot(y-1)=2\cdot(x-3)$;

$-y+1=2x-6$; $\qquad -2x-y+7=0$.

La coppia di rette parallele all'asse y ha equazione:

$(x-2)(x-3)=0$.

Pertanto, l'equazione del fascio di parabole è :

$-2x-y+7+k\cdot(x-2)(x-3)=0$;

$-2x-y+7+k\cdot(x^2-5x+6)=0$;

$-2x-y+7+kx^2-5kx \quad 6k=0$;

$y=kx^2-(2+5k)\,x+6k+7$.

Per trovare la parabola del fascio passante per l'origine è sufficiente imporre il passaggio per il punto $O\ (0\ ;\ 0)$.

$0=k\cdot 0^2-(2+5k)\cdot 0+6k+7=0$; $\qquad 0=6k+7$; $\qquad k=-\dfrac{7}{6}$.

Pertanto, l'equazione della parabola passante per l'origine è :

$y=-\dfrac{7}{6}x^2-\left(2+5\cdot\left(-\dfrac{7}{6}\right)\right)\,x+6\cdot\left(-\dfrac{7}{6}\right)+7$;

$y=-\dfrac{7}{6}x^2-\left(2-\dfrac{35}{6}\right)\,x-7+7$;

$y=-\dfrac{7}{6}x^2+\dfrac{23}{6}\,x$.

Esercizio 321.489

Determina l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, tangenti nel punto $T\ (4\,;0)$ alla retta t di equazione $y = x - 4$. Trova la parabola del fascio con vertice di ascissa 2 .

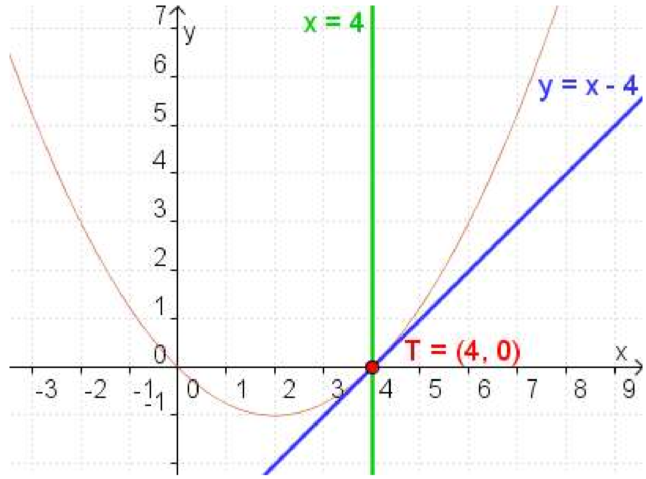
Soluzione

L'equazione del fascio di parabole è dato dalla combinazione lineare delle equazioni delle due parabole degeneri:

- la retta tangente t di equazione $y = x - 4$;

- la coppia di rette coincidenti e parallele all'asse y passanti per il punto T di equazione:

$(x-4)(x-4) = 0\,;$ $\qquad (x-4)^2 = 0\ .$



Pertanto, l'equazione del fascio di parabole è :

$x - y - 4 + k\cdot(x-4)^2 = 0\,;$

$x - y - 4 + k\cdot(x^2 - 8x + 16) = 0\,;$

$x - y - 4 + kx^2 - 8kx + 16k = 0\,;$

$y = kx^2 + (1-8k)\,x + 16k - 4\ .$

Per trovare la parabola del fascio con vertice di ascissa 2 utilizziamo la relazione:

$$x_V = -\frac{b}{2a}\ ;$$

$$2 = -\frac{1-8k}{2k}\ ; \qquad 4k = -1 + 8k\,; \qquad 4k = 1\,; \qquad k = \frac{1}{4}\ .$$

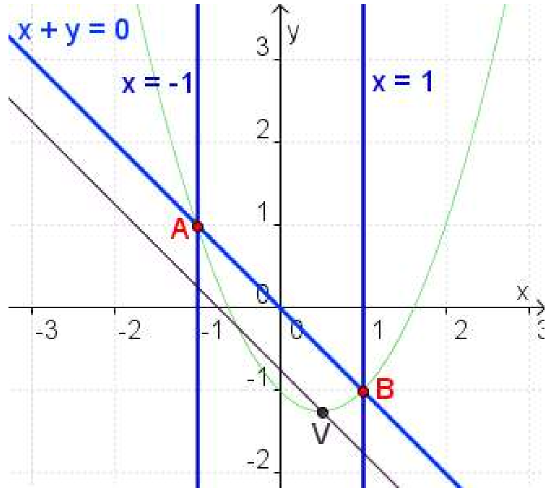
Pertanto, l'equazione della parabola richiesta è :

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \left(1 - 8\cdot\frac{1}{4}\right)\,x + 16\cdot\frac{1}{4} - 4\ ;$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x\ .$$

Esercizio 321.490

Determina l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti $A\,(-1\,;1)$ e $B\,(1\,;-1)$. Trova la parabola del fascio con concavità positiva e con il vertice sulla retta di equazione $y=-x-\frac{3}{4}$.



Soluzione

L'equazione del fascio di parabole è dato dalla combinazione lineare delle equazioni delle due parabole degeneri:

- la retta passante per i punti A e B;

- la coppia di rette parallele all'asse y passanti per i punti A e B.

L'equazione della retta AB è :

$$\frac{y-y_B}{y_A-y_B}=\frac{x-x_B}{x_A-x_B}\,; \qquad \frac{y+1}{1+1}=\frac{x-1}{-1-1}\,;$$

$$\frac{y+1}{2}=\frac{x-1}{-2}\,; \qquad y+1=-x+1\,; \qquad x+y=0\,.$$

La coppia di rette parallele all'asse y ha equazione:

$$(x+1)(x-1)=0\,; \qquad x^2-1=0\,.$$

Pertanto, l'equazione del fascio di parabole è : $x+y+k\cdot(x^2-1)=0$;

L'equazione del fascio in forma canonica è : $y=-kx^2-x+k$

(Ponendo $-k=h$ l'equazione potrebbe essere anche espressa nel seguente modo: $y=hx^2-x-h$)

Per trovare la parabola del fascio richiesta determiniamo le coordinate del vertice del fascio:

$$x_V=-\frac{1}{2k}\,; \qquad y_V=-\frac{1+4k^2}{4\cdot(-k)}=\frac{1+4k^2}{4k}\,.$$

Imponiamo l'appartenenza del vertice alla retta $y=-x-\frac{3}{4}$.

$$\frac{1+4k^2}{4k}=-\left(-\frac{1}{2k}\right)-\frac{3}{4}\,; \qquad \frac{1+4k^2}{4k}=\frac{1}{2k}-\frac{3}{4}\,; \qquad 1+4k^2=2-3k\,;$$

$$4k^2+3k-1=0\,; \qquad k_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2\cdot 4}=\frac{-3\pm 5}{8}= \begin{array}{l} k_1=\dfrac{-3-5}{8}=-1 \\ k_2=\dfrac{-3+5}{8}=+\dfrac{1}{4} \end{array}$$

Si ottengono le due parabole : $\begin{array}{l} y=x^2-x-1 \\ y=-\frac{1}{4}x^2-x+\frac{1}{4} \end{array}$

Pertanto l'equazione della parabola richiesta, con la concavità positiva è : $y=x^2-x-1$.