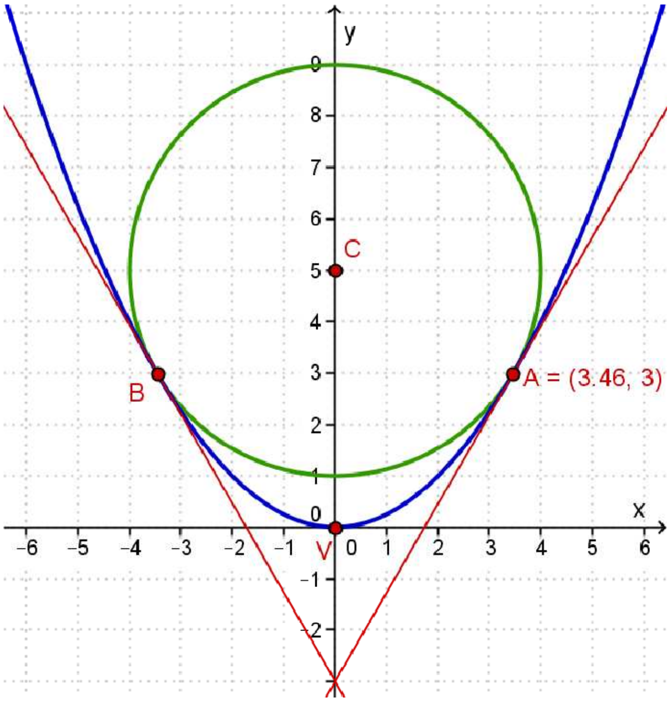
La parabola

Esercizi

Esercizio 368.395

Una circonferenza e una parabola sono disegnate nel piano cartesiano. La circonferenza ha centro nel punto $C(0\,;5)$ e raggio 4, e la parabola ha il suo vertice in $V(0\,;0)$. Se la circonferenza è tangente alla parabola in due punti, ricava l'equazione della parabola.



<u>Soluzione</u>

La circonferenza ha equazione:

$(x-0)^2+(y-5)^2=4^2\,;\qquad x^2+y^2-10y+9=0\,.$

Dovendo essere la circonferenza tangente alla parabola in due punti, la parabola deve essere del tipo $y=ax^2$ *con* $a>0$.

Consideriamo uno dei due punti di tangenza A.

Essendo A *un punto della circonferenza ha coordinate:*

$$A\left(k\,;5-\sqrt{16-k^2}\right)$$

[avendo sostituito k *al posto dell'incognita* x *nell'equazione* $x^2+y^2-10y+9=0$ *e avendo ricavato* y*:*

$k^2+y^2-10y+9=0\,;\qquad y^2-10y+k^2+9=0\,;$

$y_{1,2}=5\mp\sqrt{25-k^2-9}\,;\qquad y_{1,2}=5\mp\sqrt{16-k^2}$ *di queste due soluzioni consideriamo quella minore*

$y_1=5-\sqrt{16-k^2}$ *perché dal grafico si comprende che l'ordinata del punto di tangenza è minore di 5].*

Applicando le formule di sdoppiamento determiniamo l'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto A*:*

$$x^2\longrightarrow x_A\cdot x\qquad x\longrightarrow \frac{x_A+x}{2}\qquad y^2\longrightarrow y_A\cdot y\qquad y\longrightarrow \frac{y_A+y}{2}$$

$$x^2+y^2-10y+9=0\qquad\longrightarrow\qquad kx+\left(5-\sqrt{16-k^2}\right)y-10\cdot\frac{y+5-\sqrt{16-k^2}}{2}+9=0\,;$$

$$kx+5y-\sqrt{16-k^2}\,y-5y-25+5\sqrt{16-k^2}+9=0\,;$$

$$kx-\sqrt{16-k^2}\,y+5\sqrt{16-k^2}-16=0\,;\qquad y=\frac{k}{\sqrt{16-k^2}}\,x+\frac{5\sqrt{16-k^2}-16}{\sqrt{16-k^2}}\,.$$

Essendo A *il punto comune di tangenza, esso appartiene anche alla parabola. Pertanto ha coordinate:* $A(k\,;ak^2)$.

Determiniamo quindi l'equazione della retta tangente alla parabola nel punto A*:*

$$y=ax^2\qquad\longrightarrow\qquad \frac{y+ak^2}{2}=akx\,;\qquad y=2akx-ak^2\,.$$

Dovendo le due tangenti coincidere, deve risultare:

$$\begin{cases}\dfrac{k}{\sqrt{16-k^2}}=2ak\\[2mm] \dfrac{5\sqrt{16-k^2}-16}{\sqrt{16-k^2}}=-ak^2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{16-k^2}}=2a\\ -\end{cases}\qquad \begin{cases}a=\dfrac{1}{2\sqrt{16-k^2}}\\ -\end{cases}\qquad \begin{cases}-\\ \dfrac{5\sqrt{16-k^2}-16}{\sqrt{16-k^2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{16-k^2}}\cdot k^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\\ 10\sqrt{16-k^2}-32=-k^2\end{cases}\qquad \begin{cases}-\\ 10\sqrt{16-k^2}=32-k^2\end{cases}\qquad (*)$$

Risolvendo: $10\sqrt{16-k^2}=32-k^2$ *si ha:* $\begin{cases} 32-k^2 \geq 0 \\ \left(10\sqrt{16-k^2}\right)^2=(32-k^2)^2 \end{cases}$

$\begin{cases} -4\sqrt{2} \leq k \leq +4\sqrt{2} \\ 100\cdot(16-k^2)=1024+k^4-64k^2 \end{cases}$ $\begin{cases} -4\sqrt{2} \leq k \leq +4\sqrt{2} \\ k^4+36k^2-576=0 \end{cases}$ $\begin{cases} -4\sqrt{2} \leq k \leq +4\sqrt{2} \\ k^2=-18\mp\sqrt{324+576} \end{cases}$

$\begin{cases} -4\sqrt{2} \leq k \leq +4\sqrt{2} \\ k^2=-18\mp 30 \end{cases}$ $\begin{cases} -4\sqrt{2} \leq k \leq +4\sqrt{2} \\ k^2=-48 \end{cases}$ $\nexists x \in R$ $\nexists x \in R$

$\begin{cases} -4\sqrt{2} \leq k \leq +4\sqrt{2} \\ k^2=12 \end{cases}$ $\begin{cases} -4\sqrt{2} \leq k \leq +4\sqrt{2} \\ k_{1,2}=\mp 2\sqrt{3} \end{cases}$ $k_{1,2}=\mp 2\sqrt{3}$

Ritornando al sistema originario (∗) *:* $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2\sqrt{16-k^2}} \\ 10\sqrt{16-k^2}=32-k^2 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2\sqrt{16-\left(-2\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{1}{4} \\ k_1=-2\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2\sqrt{16-\left(+2\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{1}{4} \\ k_2=+2\sqrt{3} \end{cases}$

In definitiva i punti di tangenza hanno coordinate:

$A\left(2\sqrt{3}\ ;\ 5-\sqrt{16-\left(2\sqrt{3}\right)^2}\right) \equiv \left(+2\sqrt{3}\ ;\ 3\right)$ *e* $B\left(-2\sqrt{3}\ ;\ 3\right)$

Mentre la parabola richiesta ha equazione: $y=\frac{1}{4}x^2$.

Esercizio 369.400

Due parabole γ_1 e γ_2, hanno il vertice in comune $V(3\,;1)$, passano per $A(4\,;0)$e hanno gli assi paralleli agli assi cartesiani. Trova l'area della regione delimitata da γ_1 e γ_2.

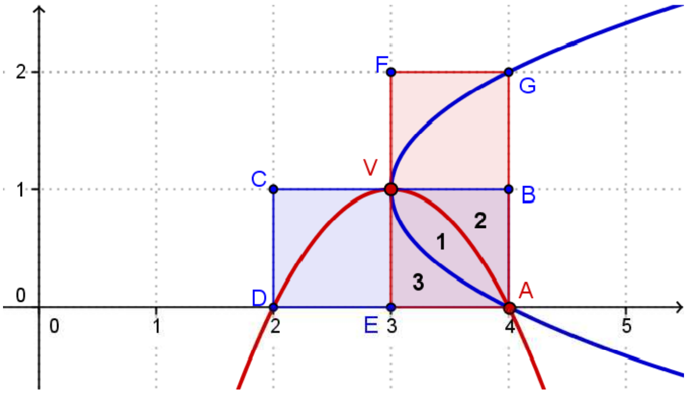
<u>*Soluzione*</u>

Determiniamo l'equazione della parabola γ_1:

La parabola ha equazione del tipo: $y = ax^2 + bx + c$

Imponiamo il passaggio per i punti A e V e la conoscenza dell'ascissa del vertice.

$$\begin{cases} 1 = 9a + 3b + c \\ 0 = 16a + 4b + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 9a - 18a + c = 1 \\ 16a - 24a + c = 0 \\ b = -6a \end{cases} \quad \begin{cases} c = 1 + 9a \\ -8a + 1 + 9a = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ a = -1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} c = -8 \\ a = -1 \\ b = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -x^2 + 6x - 8$$



Determiniamo l'equazione della parabola γ_2:

La parabola ha equazione del tipo: $x = ay^2 + by + c$

Imponiamo il passaggio per i punti A e V e la conoscenza dell'ascissa del vertice.

$$\begin{cases} 3 = a + b + c \\ 4 = c \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = a - 2a + 4 \\ c = 4 \\ b = -2a \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ c = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x = y^2 - 2y + 4$$

Per determinare l'area S_1 della regione delimitata da γ_1 e γ_2 occorre determinare le aree dei due segmenti parabolici S_{AVD} e S_{AVG} :

$$S_{ABCD} = \overline{AD} \cdot \overline{AB} = 2 \cdot 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad S_{AVD} = \frac{2}{3} S_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{S_{ABCD} - S_{AVD}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$S_{AEFG} = \overline{AE} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad S_{AVG} = \frac{2}{3} S_{AEFG} = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{S_{AEFG} - S_{AVG}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Pertanto l'area della regione delimitata da γ_1 e γ_2 è:

$$S_1 = S_{ABVE} - S_2 - S_3 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Esercizio 369.405

Tre parabole con asse parallelo all'asse y hanno vertici $V_1(1\,;0)$, $V_2(2\,;-2)$, $V_3(1\,;2)$ e intersecano l'asse y nei punti di ordinata $-1, -6$ e 3 , rispettivamente. Trova le loro equazioni, verifica che hanno una tangente comune e determina le coordinate dei punti di contatto.

<u>Soluzione</u>

La prima parabola γ_1 ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Imponendo il passaggio per i punti $V_1(1\,;0)$ *e* $A(0\,;-1)$ *e sfruttando la conoscenza dell'ascissa del vertice si ha:*

$$\begin{cases} 0 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ -1 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ c=-1 \\ b=-2a \end{cases} \quad \begin{cases} a-2a-1=0 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=-2\cdot(-1)=2 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow \quad y=-x^2+2x-1$$

La seconda parabola γ_2 ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Imponendo il passaggio per i punti $V_2(2\,;-2)$ *e* $A(0\,;-6)$ *e sfruttando la conoscenza dell'ascissa del vertice si ha:*

$$\begin{cases} -2 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \\ -6 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a+2b+c=-2 \\ c=-6 \\ b=-4a \end{cases} \quad \begin{cases} 4a-8a-6=-1 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=-6 \end{cases} \Rightarrow \quad y=-x^2+4x-6$$

La terza parabola γ_3 ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Imponendo il passaggio per i punti $V_2(1\,;\,2)$ *e* $A(0\,;3)$ *e sfruttando la conoscenza dell'ascissa del vertice si ha:*

$$\begin{cases} 2 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \\ 3 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b+c=2 \\ c=3 \\ b=-2a \end{cases} \quad \begin{cases} a-2a+3=2 \\ - \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases} \Rightarrow \quad y=x^2-2x+3$$

Metodo 1

Poiché una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate non può avere una retta tangente parallela a tale asse, possiamo scrivere in modo esplicito l'equazione di una generica retta tangente come $y = mx + q$ senza perdere generalità.

Imponiamo che tale retta sia tangente alla prima parabola γ_1

$$\begin{cases} y=-x^2+2x-1 \\ y=mx+q \end{cases} \quad \begin{cases} mx+q=-x^2+2x-1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+(m-2)x+1+q=0 \\ - \end{cases}$$

$\Delta = 0$; $(m-2)^2 - 4(1+q) = 0$; $m^2 + 4 - 4m - 4 - 4q = 0$; $m^2 - 4m - 4q = 0$;

Imponiamo che tale retta sia tangente alla seconda parabola γ_2

$$\begin{cases} y=-x^2+4x-6 \\ y=mx+q \end{cases} \quad \begin{cases} mx+q=-x^2+4x-6 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+(m-4)x+6+q=0 \\ - \end{cases}$$

$\Delta = 0$; $(m-4)^2 - 4(6+q) = 0$; $m^2 + 16 - 8m - 24 - 4q = 0$; $m^2 - 8m - 4q - 8 = 0$;

Affinché la retta sia tangente ad entrambe le parabole occorre siano soddisfatte le due condizioni di tangenza.

$$\begin{cases} m^2-8m-4q-8=0 & - \\ m^2-4m-4q=0 & = \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene:

$-4m - 8 = 0$; $m = -2$.

Sostituendo $m = -2$ *in* $m^2 - 4m - 4q = 0$ *si ricava* $(-2)^2 - 4(-2) - 4q = 0$; $-4q = -12$; $q = 3$.

Pertanto, la tangente comune alle due parabole ha equazione: $y = -2x + 3$.

Verifichiamo che tale retta risulta tangente anche alla terza parabola.

$$\begin{cases} y=x^2-2x+3 \\ y=-2x+3 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x+3=x^2-2x+3 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x=0\ (doppia) \\ y=-2\cdot 0+3=3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C(0;3)$$

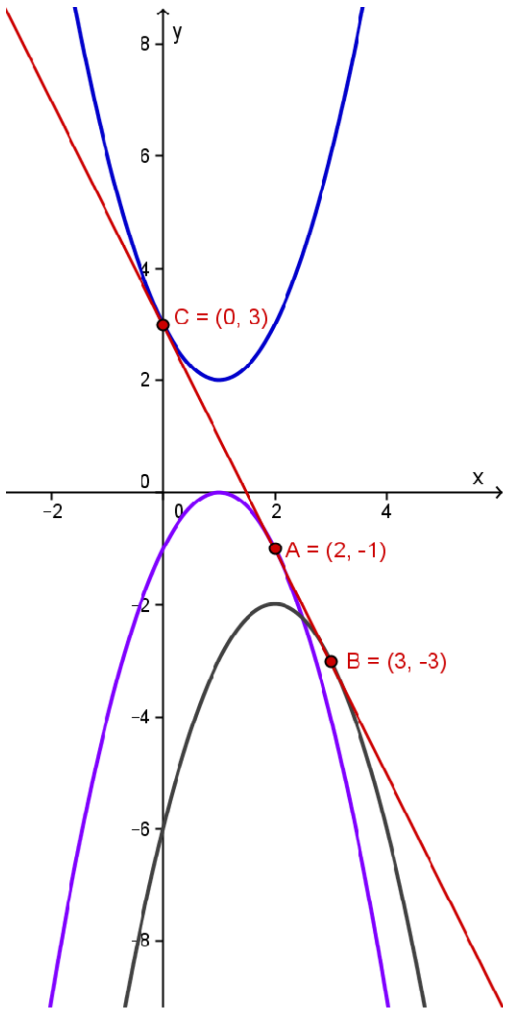
Avendo ottenuto un solo punto di intersezione, vuol dire che la retta $y = -2x + 3$ è tangente anche alla terza parabola.

Per trovare i punti di contatto della tangente con le prime due parabole occorre risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x - 1 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 3 = -x^2 + 2x - 1 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\ (doppia) \\ y = -2 \cdot 2 + 3 = -1 \end{cases} \quad A(2;\ -1)$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 6 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 3 = -x^2 + 4x - 6 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3\ (doppia) \\ y = -2 \cdot 3 + 3 = -3 \end{cases} \quad B(3;\ -3)$$

Metodo 2



Determiniamo l'equazione della retta t_A tangente in A a γ_1 :

Utilizzando le formule di sdoppiamento si ottiene:

$$x^2 \longrightarrow x_A \cdot x \qquad y^2 \longrightarrow y_A \cdot y$$
$$x \longrightarrow \frac{x_A + x}{2} \qquad y \longrightarrow \frac{y_A + y}{2}$$

$$y = -x^2 + 2x - 1 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{y_A + y}{2} = -x_A \cdot x + 2 \cdot \frac{x_A + x}{2} - 1$$

$y_A + y = -2x_A \cdot x + 2x_A + 2x - 2$;

$y = (2 - 2x_A) \cdot x + 2x_A - 2 - y_A$.

Determiniamo l'equazione della retta t_B tangente in B a γ_2 :

$$y = -x^2 + 4x - 6 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{y_B + y}{2} = -x_B \cdot x + 4 \cdot \frac{x_B + x}{2} - 6$$

$y_B + y = -2x_B \cdot x + 4x_B + 4x - 12$;

$y = (4 - 2x_B) \cdot x + 4x_B - 12 - y_B$.

Determiniamo l'equazione della retta t_C tangente in C a γ_3 :

$$y = x^2 - 2x + 3 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{y_C + y}{2} = x_C \cdot x - 2 \cdot \frac{x_C + x}{2} + 3$$

$y_C + y = 2x_C \cdot x - 2x_C - 2x + 6$;

$y = (2x_C - 2) \cdot x - 2x_C + 6 - y_C$;

Affinché le tre tangenti siano coincidenti deve risultare che:

$$\begin{cases} 2 - 2x_A = 4 - 2x_B = 2x_C - 2 \\ 2x_A - 2 - y_A = 4x_B - 12 - y_B = -2x_C + 6 - y_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 2x_A = 4 - 2x_B \\ 4 - 2x_B = 2x_C - 2 \\ 2x_A - 2 - y_A = 4x_B - 12 - y_B \\ 4x_B - 12 - y_B = -2x_C + 6 - y_C \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - x_A = 2 - x_B \\ 2 - x_B = x_C - 1 \\ 2x_A - y_A = 4x_B - 10 - y_B \\ 4x_B - y_B = -2x_C + 18 - y_C \end{cases} \quad \begin{cases} x_A = x_B - 1 \\ x_C = 3 - x_B \\ 2(x_B - 1) - y_A = 4x_B - 10 - y_B \\ 4x_B - y_B = -2(3 - x_B) + 18 - y_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = x_B - 1 \\ x_C = 3 - x_B \\ 2x_B - 2 - y_A = 4x_B - 10 - y_B \\ 4x_B - y_B = -6 + 2x_B + 18 - y_C \end{cases} \quad \begin{cases} x_A = x_B - 1 \\ x_C = 3 - x_B \\ y_A = -2x_B + 8 + y_B \\ y_C = -2x_B + 12 + y_B \end{cases}$$

Ma $\quad y_A = f(x_A) = f(x_B - 1) = -(x_B - 1)^2 + 2(x_B - 1) - 1 = -{x_B}^2 - 1 + 2x_B + 2x_B - 2 - 1 = -{x_B}^2 + 4x_B - 4$

e $\quad y_B = g(x_B) = -{x_B}^2 + 4x_B - 6 \qquad (\gamma_2)$

Pertanto: $\quad y_A = -2x_B + 8 + y_B \qquad$ *diventa:*

$-{x_B}^2 + 4x_B - 4 = -2x_B + 8 + (-{x_B}^2 + 4x_B - 6)$;

$-{x_B}^2 + 4x_B - 4 = -2x_B + 8 - {x_B}^2 + 4x_B - 6$;

$-4 = -2x_B + 8 - 6$;

$2x_B = 6$;

$x_B = 3 \qquad \Rightarrow \qquad y_B = g(x_B) = -x_B{}^2 + 4x_B - 6 = -3^2 + 4 \cdot 3 - 6 = -3$

$$\begin{cases} x_A = x_B - 1 = 3 - 1 = 2 \\ x_C = 3 - x_B = 3 - 3 = 0 \\ y_A = -2x_B + 8 + y_B = -2 \cdot 3 + 8 + (-3) = -1 \\ y_C = -2x_B + 12 + y_B = -2 \cdot 3 + 12 + (-3) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_A = 2 \\ x_C = 0 \\ y_A = -1 \\ y_C = 3 \end{cases}$$

Le coordinate dei punti di contatto sono: $A(2\,;-1)$, $B(3\,;\,-3)$, $C(0\,;3)$.

La tangente comune ha equazione:

$y = (2 - 2x_A) \cdot x + 2x_A - 2 - y_A$;

$y = (2 - 2 \cdot 2) \cdot x + 2 \cdot 2 - 2 - (-1)$

$y = -2x + 3$.

Esercizio 369.407

Scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per $A(1\,;0)$ e $B(4\,;-3)$ e tangente in quest'ultimo punto alla retta t di coefficiente angolare -4.

a. Per un punto P dell'arco AB di parabola, conduci la retta parallela all'asse y e indica con Q il punto che tale retta ha in comune con la corda AB. Determina P e Q in modo che l'area del triangolo APQ sia 2.

b. Scrivi l'equazione del fascio di parabole tangente in B alla retta t e trova quale di queste ha il vertice sull'asse x.

Soluzione 0

La retta t ha equazione: $y=-4x+q$.

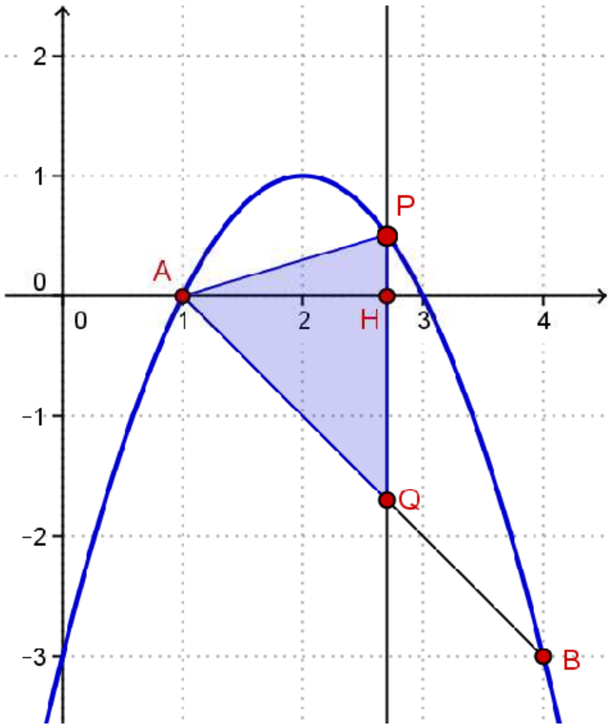
La retta t passa per il punto $B(4\,;-3)$ $\Rightarrow$ *le sue coordinate soddisfano la sua equazione:* $-3=-4\cdot 4+q\,;\quad q=13$.

Quindi la retta t ha equazione: $y=-4x+13$.

L'equazione del fascio di parabole tangente in B alla retta t ha equazione: $4x+y-13+k(x-4)^2=0$.

Determiniamo la parabola del fascio passante per il punto $A(1\,;0)$*:*

$4\cdot 1+0-13+k(1-4)^2=0\,;\qquad -9+9k=0\,;\qquad k=1.$



Pertanto la parabola richiesta ha equazione:

$4x+y-13+1\cdot(x-4)^2=0\,;$

$4x+y-13+x^2+16-8x=0\,;$

$y=-x^2+4x-3.$

Soluzione a

Il punto P dell'arco AB di parabola ha coordinate:
$P(k\,;\,-k^2+4k-3)$ *con* $1\le k\le 4$

L'equazione della retta AB è:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A}\,;\qquad \frac{y-0}{-3-0}=\frac{x-1}{4-1}\,;\qquad \frac{y}{-3}=\frac{x-1}{3}\,;$$

$y=-x+1$

Il punto Q della corda AB ha coordinate: $Q(k\,;\,-k+1)$.

Il punto H piede dell'altezza AH ha coordinate: $H(k\,;\,0)$.

L'area del triangolo APQ è:

$$S_{APQ}=\tfrac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{AH}=\tfrac{1}{2}|y_P-y_Q|\cdot|x_H-x_A|$$

Essendo $\forall k\in[1\,,4]$ $\quad y_P\ge y_Q$ *e* $x_H\ge x_A$ *possiamo eliminare il valore assoluto* $\Rightarrow$

$$S_{APQ}=\frac{1}{2}(y_P-y_Q)\cdot(x_H-x_A)=\frac{1}{2}[-k^2+4k-3-(-k+1)]\cdot(k-1)=\frac{1}{2}(-k^2+5k-4)\cdot(k-1)=$$

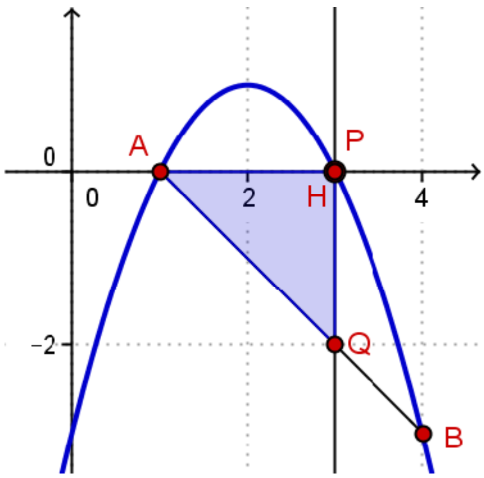
$$=\tfrac{1}{2}(-k^3+5k^2-4k+k^2-5k+4)=\tfrac{1}{2}(-k^3+6k^2-9k+4)$$

Imponiamo che tale area sia uguale a 2.

$$\frac{1}{2}(-k^3+6k^2-9k+4)=2\,;\qquad -k^3+6k^2-9k+4=4\,;$$

$-k^3+6k^2-9k=0\,;$

$$-k(k^2-6k+9)=0\,;\qquad -k(k-3)^2=0\,;\qquad \begin{array}{ll} k=0 & non\ \ accettabile \\ k=3 & \qquad accettabile \end{array}$$



Pertanto il punto P ha coordinate: $P(3\,;\,-3^2+4\cdot 3-3)\equiv(3\,;\,0)$.

Mentre il punto Q ha coordinate: $Q(3\,;\,-3+1)\equiv(3\,;-2)$.

Soluzione b

L'equazione del fascio di parabole tangente in B alla retta t ha equazione: $4x + y - 13 + k(x-4)^2 = 0$.

Per rispondere al quesito occorre riscrivere l'equazione in forma canonica:

$4x + y - 13 + k(x^2 + 16 - 8x) = 0$; $\qquad 4x + y - 13 + kx^2 + 16k - 8kx = 0$;

$y = -kx^2 + (8k-4)x + 13 - 16k$;

Dovendo il fuoco appartenere all'asse x*, deve risultare:* $-\frac{\Delta}{4a} = 0$ *cioè* $\Delta = 0$ $\quad (con\ a \neq 0)$

$(8k-4)^2 - 4(-k)(13-16k) = 0$; $\qquad 64k^2 + 16 - 64k + 52k - 64k^2 = 0$;

$16 - 64k + 52k = 0$; $\qquad 16 - 12k = 0$; $\qquad k = \dfrac{4}{3}$.

Pertanto l'equazione della parabola richiesta è:

$4x + y - 13 + \dfrac{4}{3} \cdot (x-4)^2 = 0$; $\qquad 4x + y - 13 + \dfrac{4}{3} \cdot (x^2 + 16 - 8x) = 0$;

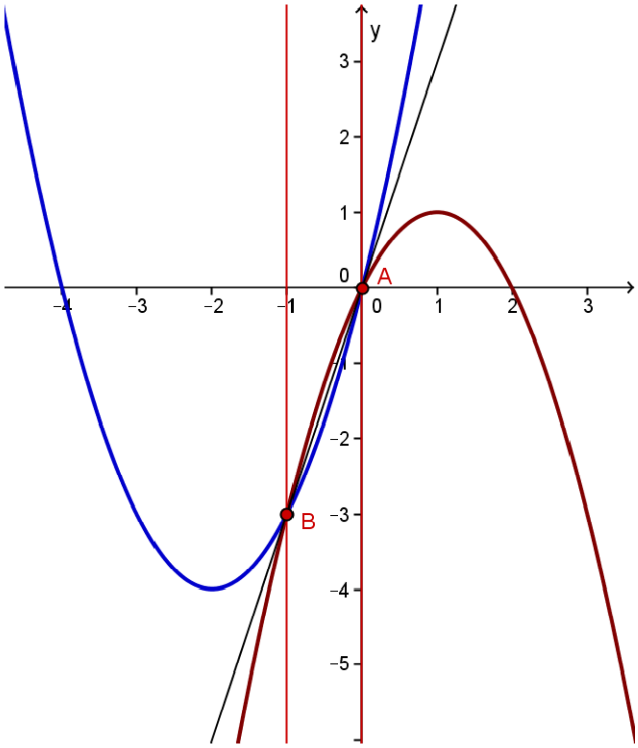
$4x + y - 13 + \dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{64}{3} - \dfrac{32}{3}x = 0$; $\qquad y = -\dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{32}{3}x - 4x + 13 - \dfrac{64}{3}$;

$y = -\dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{20}{3}x - \dfrac{25}{3}$.

Esercizio 370.410

Dopo aver rappresentato le parabole γ_1 e γ_2 di equazioni $y = x^2 + 4x$ e $y = -x^2 + 2x$, scrivi l'equazione del fascio da esse individuato, poi determina le parabole:

a. degeneri
b. con asse di simmetria coincidente con l'asse y
c. con il fuoco sull'asse x
d. considera la parabola γ_1 e trova il perimetro del triangolo rettangolo isoscele che ha l'ipotenusa sull'asse x e i cateti tangenti alla parabola. Calcola la lunghezza della corda che collega i punti di tangenza.



Soluzione 0

L'equazione del fascio è: $y - x^2 - 4x + k(y + x^2 - 2x) = 0$

Soluzione a

Per determinare le parabole degeneri occorre riscrivere il fascio in forma canonica:

$y - x^2 - 4x + ky + kx^2 - 2kx = 0\,;$

$(1 + k)y = (1 - k)x^2 + (4 + 2k)x\,;$

Se $k \neq -1 \quad \longrightarrow \quad y = \dfrac{1-k}{1+k}x^2 + \dfrac{4+2k}{1+k}x$

Se $k = -1 \quad \longrightarrow \quad 2x^2 + 2x = 0\,; \quad 2x(x + 1) = 0$

Si ottengono così le parabole degeneri: $x = 0$ *e* $x + 1 = 0$.

Per $k = 1$ *(valore che fa annullare il coefficiente di* x^2*) si ottiene un'altra parabola degenere, la retta per i punti base del fascio:*

$y = \dfrac{1-1}{1+1}x^2 + \dfrac{4+2\cdot 1}{1+1}x\,; \qquad y = 3x$

Soluzione b

Per determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse y occorre imporre:

$-\dfrac{b}{2a} = 0\,; \qquad b = 0 \quad (a \neq 0); \qquad \dfrac{4+2k}{1+k} = 0\,; \qquad 4 + 2k = 0\,; \qquad k = -2$

$\Rightarrow \qquad y = \dfrac{1-(-2)}{1+(-2)}x^2 + \dfrac{4+2\cdot(-2)}{1+(-2)}x\,; \qquad y = -3x^2\,.$

Soluzione c

Per determinare l'equazione della parabola con il fuoco sull'asse x *occorre imporre:*

$\dfrac{1-\Delta}{4a} = 0\,; \qquad 1 - \Delta = 0\,; \qquad 1 - \left(\dfrac{4+2k}{1+k}\right)^2 + 4\cdot\dfrac{1-k}{1+k}\cdot 0 = 0\,; \qquad 1 - \left(\dfrac{4+2k}{1+k}\right)^2 = 0\,;$

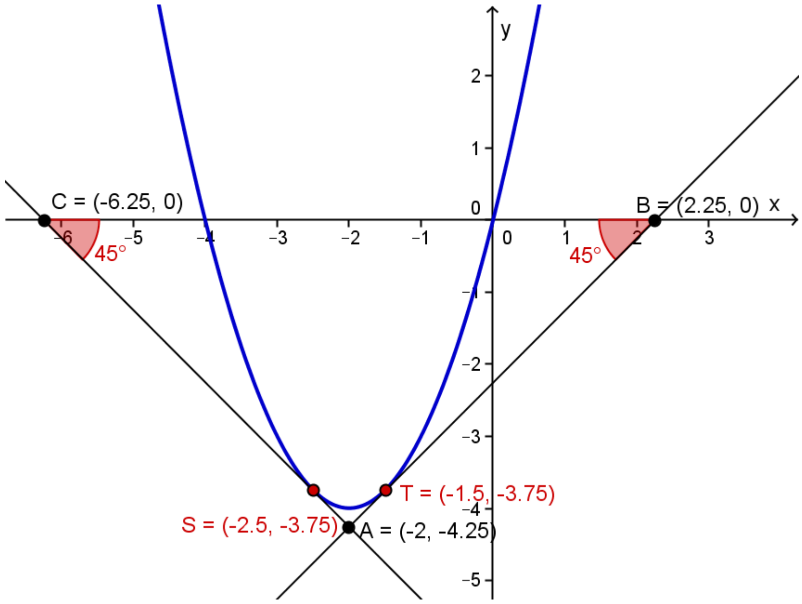
$1 - \dfrac{16 + 4k^2 + 16k}{1 + k^2 + 2k} = 0\,; \qquad 1 + k^2 + 2k - 16 - 4k^2 - 16k = 0\,; \qquad 3k^2 + 14k + 15 = 0\,;$

$\dfrac{\Delta}{4} = 49 - 45 = 4\,; \qquad k_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{4}}{3} = \begin{matrix} \dfrac{-7-2}{3} & = & -3 \\ \dfrac{-7+2}{3} & = & -\dfrac{5}{3} \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} y = \dfrac{1-(-3)}{1+(-3)}x^2 + \dfrac{4+2\cdot(-3)}{1+(-3)}x \\ y = \dfrac{1-\left(-\frac{5}{3}\right)}{1+\left(-\frac{5}{3}\right)}x^2 + \dfrac{4+2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{1+\left(-\frac{5}{3}\right)}x \end{matrix}$

$y = -2x^2 + x \qquad\qquad y = -2x^2 + x$

$y = \dfrac{\frac{8}{3}}{-\frac{2}{3}}x^2 + \dfrac{4 - \frac{10}{3}}{-\frac{2}{3}}x \qquad\qquad y = -4x^2 - x$

Soluzione d



Trattandosi di un triangolo rettangolo isoscele, esso ha i due angoli alla base di $45°$.

Pertanto:

il cateto tangente AB *ha equazione* $y = x + q$

il cateto tangente AC *ha equazione* $y = -x + r$

Per determinare l'equazione del cateto AB *occorre sfruttare la condizione di tangenza.*

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x + q \end{cases} \qquad \begin{cases} x + q = x^2 + 4x \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - q = 0 \\ - \end{cases} \qquad \Delta = 0\,;$$

$$9 + 4q = 0\,; \qquad q = -\frac{9}{4} \qquad \Rightarrow \qquad y = x - \frac{9}{4}$$

Per determinare l'equazione del cateto AC *occorre sfruttare la condizione di tangenza.*

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = -x + r \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + r = x^2 + 4x \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 5x - r = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\Delta = 0\,; \qquad 25 + 4r = 0\,; \qquad r = -\frac{25}{4} \qquad \Rightarrow \qquad y = -x - \frac{25}{4}$$

Determiniamo i vertici del triangolo ABC .

$$A: \begin{cases} AB \\ AC \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - \dfrac{9}{4} \\ y = -x - \dfrac{25}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x - \dfrac{9}{4} = -x - \dfrac{25}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2x = -\dfrac{16}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 - \dfrac{9}{4} = -\dfrac{17}{4} \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow A\left(-2\,; -\frac{17}{4}\right)$$

$$B: \begin{cases} AB \\ BC \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - \dfrac{9}{4} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{9}{4} \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{9}{4}\,; 0\right)$$

$$C: \begin{cases} AC \\ BC \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x - \dfrac{25}{4} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{25}{4} \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\left(-\frac{25}{4}\,; 0\right)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(-2 - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(-\frac{17}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{17}{4}\right)^2 + \left(-\frac{17}{4}\right)^2} = \frac{17}{4}\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(-2 + \frac{25}{4}\right)^2 + \left(-\frac{17}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^2 + \left(-\frac{17}{4}\right)^2} = \frac{17}{4}\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \left|\frac{9}{4} + \frac{25}{4}\right| = \left|\frac{34}{4}\right| = \frac{17}{2}$$

Il perimetro è: $2p = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \frac{17}{4}\sqrt{2} + \frac{17}{4}\sqrt{2} + \frac{17}{2} = \frac{17}{2}\sqrt{2} + \frac{17}{2} = \frac{17}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

Determiniamo le coordinate dei punti di tangenza:

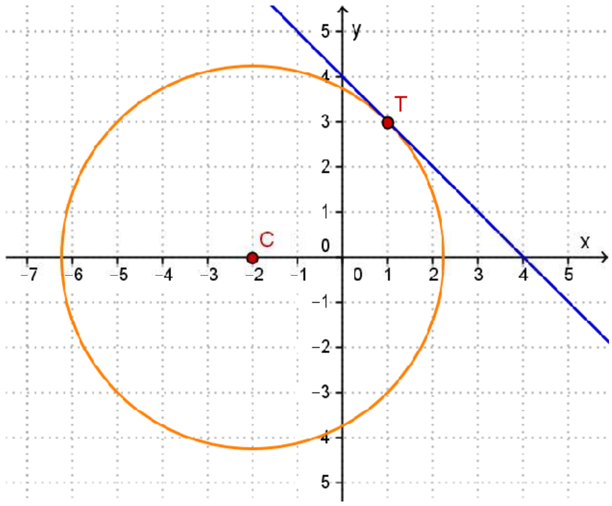
$$T: \begin{cases} AB \\ \gamma_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - \dfrac{9}{4} \\ y = x^2 + 4x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 4x = x - \dfrac{9}{4} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 3x + \dfrac{9}{4} = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{15}{4} \end{cases} \quad T\left(-\frac{3}{2}; -\frac{15}{4}\right)$$

$$S: \begin{cases} AC \\ \gamma_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x - \dfrac{25}{4} \\ y = x^2 + 4x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 4x = -x - \dfrac{25}{4} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 5x + \dfrac{25}{4} = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 = 0 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{15}{4} \end{cases} \quad S\left(-\frac{5}{2}; -\frac{15}{4}\right)$$

La misura della corda TS *è:* $\overline{TS} = \left|-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{2}{2}\right| = 1$.

Esercizio 371.415

Determina l'equazione della retta t tangente in $T(1\,;3)$ alla circonferenza con centro in $C(-2\,;0)$, quindi scrivi l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, tangente in T alla retta t e passante per il punto $A(-1\,;9)$. Trova l'equazione di una retta parallela all'asse y che interseca la parabola in P e la retta t in Q in modo che l'area del triangolo PQT sia uguale a 108.



Soluzione a

Determiniamo l'equazione della circonferenza:

Dalla conoscenza delle coordinate del centro si ottiene:

$(x+2)^2+(y-0)^2=r^2$

Imponendo il passaggio per il punto di tangenza $T(1\,;3)$ si ricava:

$(1+2)^2+(3-0)^2=r^2\,; \qquad 3^2+3^2=r^2\,; \qquad r^2=18\,.$

Pertanto l'equazione della circonferenza è:

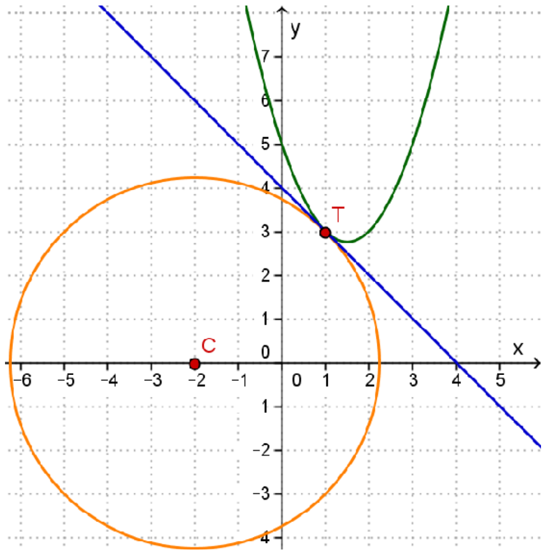
$(x+2)^2+y^2=18\,; \qquad x^2+4+4x+y^2-18=0\,;$

$x^2+y^2+4x-14=0.$

Utilizzando le formule di sdoppiamento si ricava l'equazione della retta t tangente in $T(1\,;3)$ alla circonferenza:

$$x^2+y^2+4x-14=0 \qquad \rightarrow \qquad 1\cdot x+3\cdot y+4\cdot\frac{x+1}{2}-14=0\,;$$

$$x+3y+2x+2-14=0\,; \qquad 3x+3y-12=0\,; \qquad x+y-4=0 \quad (t)\,.$$



Soluzione b

Dapprima determiniamo il fascio di parabole tangente in T alla retta t:

$x+y-4+k(x-1)^2=0$

In seguito determiniamo la parabola del fascio passante per $A(-1\,;9)$

$x+y-4+k(x-1)^2=0\,; \qquad -1+9-4+k(-1-1)^2=0\,;$

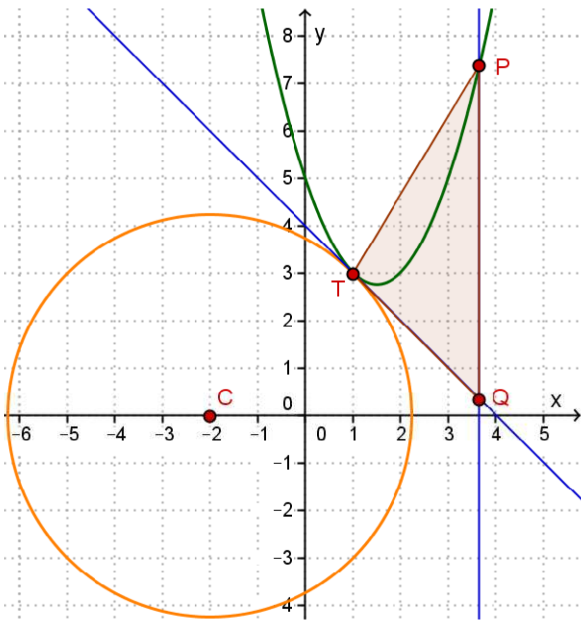
$4+4k=0\,; \qquad k=-1\,.$

L'equazione della parabola richiesta ha equazione:

$x+y-4-1\cdot(x-1)^2=0\,;$

$x+y-4-x^2-1+2x=0\,;$

$y=x^2-3x+5$



Soluzione c

Il punto P ha coordinate $P(k\,;\,k^2-3k+5)$

Il punto Q ha coordinate $Q(k\,;\,-k+4)$

L'area del triangolo PQT è :

$$S_{PQT}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_P-x_T & y_P-y_T\\ x_Q-x_T & y_Q-y_T\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}k-1 & k^2-3k+5-3\\ k-1 & -k+4-3\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}[(k-1)(-k+4-3)-(k-1)(k^2-3k+5-3)]\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}[(k-1)(1-k)-(k-1)(k^2-3k+2)]\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}[k-k^2-1+k-k^3+3k^2-2k+k^2-3k+2]\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}[-k^3+3k^2-3k+1]\right|.$$

Imponiamo che tale area sia uguale a 108:

$$\left|\frac{1}{2}[-k^3+3k^2-3k+1]\right| = 108\ ; \qquad |-k^3+3k^2-3k+1| = 216\ ; \qquad \begin{array}{l} -k^3+3k^2-3k+1=-216 \\ -k^3+3k^2-3k+1=+216 \end{array}$$

Risolviamo:

$-k^3+3k^2-3k+1=-216$;

$k^3-3k^2+3k-217=0$;

$(k-7)(k^2+4k+31)=0$;

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & +3 & -217 \\ 7 & & +7 & +28 & +217 \\ \hline & 1 & +4 & +31 & = \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} k-7=0 & k=7 \\ k^2+4k+31=0 & \nexists k \in R \end{array}$$

Risolviamo:

$-k^3+3k^2-3k+1=+216$;

$k^3-3k^2+3k+215=0$;

$(k+5)(k^2-8k+43)=0$;

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & +3 & +215 \\ -5 & & -5 & +40 & -215 \\ \hline & 1 & -8 & +43 & = \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} k+5=0 & k=-5 \\ k^2-8k+43=0 & \nexists k \in R \end{array}$$

Pertanto ci sono due soluzioni:

$k_1=-5$ *e* $k_2=7$.

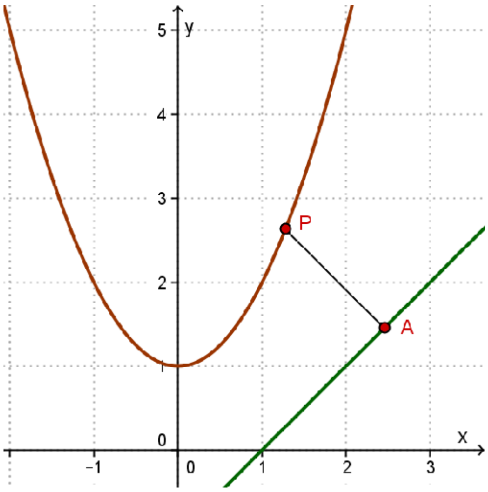
Da cui si ricavano le due rette parallele all'asse y: $x=-5$ *e* $x=7$.

Esercizio 384.30

Siano date la parabola γ di equazione $y = x^2 + 1$ e la retta r di equazione $y = x - 1$.

1. Qual è la distanza minima tra γ e r ? E quale ne è il valore ?
2. Siano A e B i punti di intersezione di γ con la retta s d'equazione $y = x + 3$, si determini il punto P appartenente all'arco AB tale che il triangolo ABP abbia area massima.
3. Si determini l'area del segmento parabolico di base AB e si verifichi che essa è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABP. […].

[Esame di Stato, Liceo Scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria, 2005, problema 2]



Soluzione 1

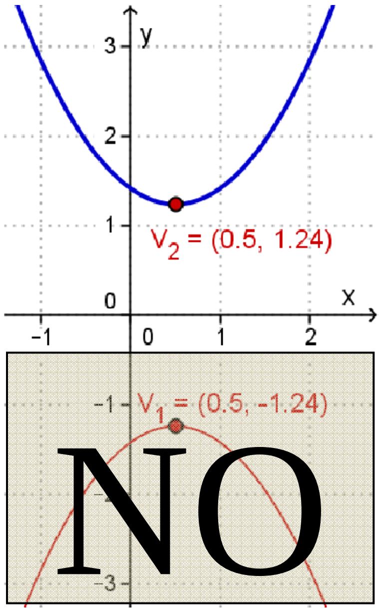
Un punto P della parabola ha coordinate $P(k\,;\,k^2+1)$

La distanza del punto P dalla retta $x - y - 1 = 0$ è:

$$d = \frac{|1\cdot k - 1\cdot(k^2+1) - 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k - k^2 - 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|-k^2+k-2|}{\sqrt{2}}$$

Per determinare il valore minimo della distanza occorre tracciare il grafico della curva:

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}|-k^2+k-2| \qquad \textit{nel dominio} \quad D[-\infty\,,+\infty]$$



Per tracciare il grafico della funzione $d(k)$ conviene tracciare prima il grafico della funzione: $e = \frac{1}{\sqrt{2}}(-k^2+k-2)$

ed in seguito simmetrizzare rispetto all'asse y la parte del grafico che si trova nel semipiano negativo delle y.

Dal grafico della funzione $d(k)$ si ricava che il valore minimo si ha nel vertice della parabola, cioè in

$$x = x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{2}$$

Sostituendo tale valore nella funzione $d = \frac{1}{\sqrt{2}}|-k^2+k-2|$ si ottiene:

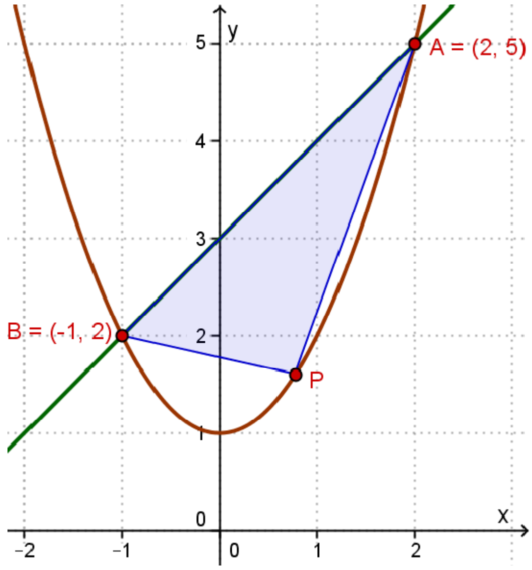
$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{-1+2-8}{4}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{7}{4} = \frac{7}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

Soluzione 2

Determiniamo i punti di intersezione A e B fra la parabola $y = x^2+1$ e la retta $y = x+3$

$$\begin{cases} y = x^2+1 \\ y = x+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x+3 = x^2+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ x_{A,B} = \frac{1\mp\sqrt{9}}{2} = \frac{1\mp 3}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} \begin{cases} y_B = +2 \\ x_B = -1 \end{cases} & B(-1\,;\,+2) \\ \begin{cases} y_A = +5 \\ x_A = +2 \end{cases} & A(+2\,;\,+5) \end{matrix}$$

L'area del triangolo PQT è :



$$S_{ABP} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_P - x_B & y_P - y_B \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2+1 & 5-2 \\ k+1 & k^2+1-2 \end{vmatrix}\right| =$$

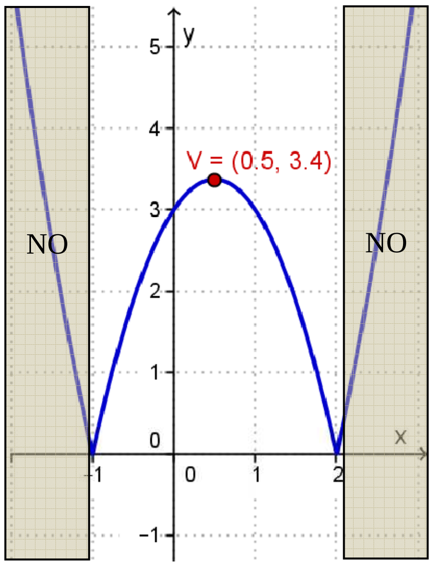
$$= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ k+1 & k^2-1 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}[3(k^2-1) - 3(k+1)]\right| = \left|\frac{1}{2}[3k^2 - 3 - 3k - 3]\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2}[3k^2 - 3k - 6]\right| = \frac{1}{2}|3k^2 - 3k - 6|$$

Per determinare il valore massimo dell'area occorre, anche in questo caso, tracciare il grafico della curva:

$$S = \frac{1}{2}|3k^2 - 3k - 6| \qquad nel\ dominio\ \ D[-1\,,2]$$



Dal grafico si ricava che il valore massimo si ha nel vertice della parabola, cioè in

$$x = x_V = -\frac{-3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

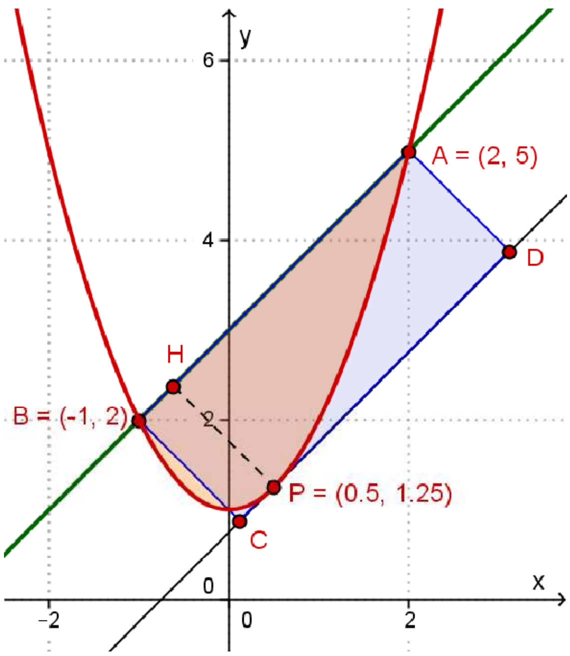
Sostituendo tale valore in $P(k\ ;\ k^2+1)$ *si ottiene* $P\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{4}\right)$.

Soluzione 3

La base AB del rettangolo ABCD misura:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

L'altezza PH del rettangolo ABCD si ottiene calcolando la distanza del punto $P\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{4}\right)$ *dalla retta AB di equazione* $x - y + 3 = 0$ *.*



$$\overline{PH} = \frac{\left|1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{5}{4} + 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{5}{4} + 3\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\left|\frac{2-5+12}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{4\sqrt{2}}$$

L'area del segmento parabolico APB è:

$$S_{\overset{\frown}{APB}} = \frac{2}{3} S_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{PH} = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{9}{2}.$$

L'area del triangolo è:

$$S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{PH} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{9}{4\sqrt{2}} = \frac{27}{8}.$$

Il rapporto delle due aree è: $\quad \dfrac{S_{\overset{\frown}{APB}}}{S_{APB}} = \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{8}{27} = \dfrac{4}{3}$.