Fascio di parabole

Esercizi

Esercizio 362.341

Studia il seguente fascio di parabole: $y - 3 = ax^2$

1. Determiniamo la forma canonica:

   $y = ax^2 + 3$

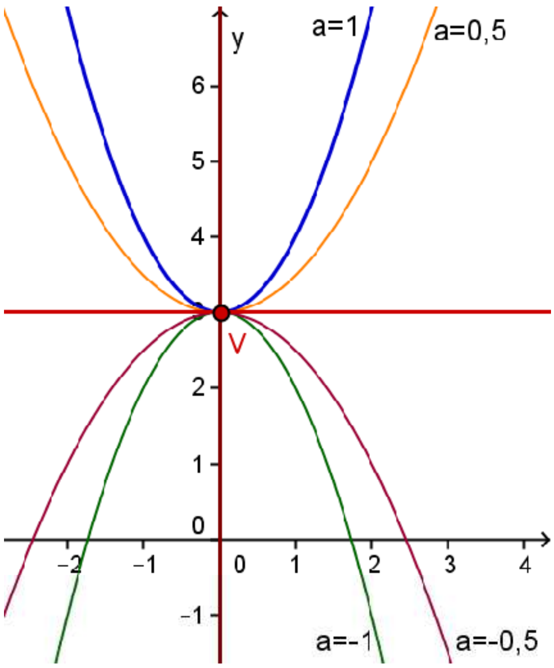
2. Determiniamo le coordinate dei vertici al variare del parametro a :

   $x_V = -\frac{B}{2A} = -\frac{0}{2a} = 0$
   $y_V = a \cdot 0^2 + 3 = 3$ $\quad \Rightarrow \quad V\ (0; 3)$

   Il vertice non dipende dal parametro a .

   Pertanto il vertice è uguale per tutte le parabole del fascio, ed esso è un punto base del fascio.

   L'asse di simmetria è fisso, e ha equazione: $x = 0$.



3. Studiamo la concavità:

   Se $a > 0$ $\longrightarrow$ le parabole volgono la concavità verso l'alto.

   Se $a < 0$ $\longrightarrow$ le parabole volgono la concavità verso il basso.

   Se $a = 0$ $\longrightarrow$ la parabola è degenere: la retta $y = 3$.

4. Determiniamo le parabole generatrici:

   Scriviamo il fascio di parabole come combinazione lineare:

   $y - 3 - a \cdot x^2 = 0$

   Le parabole generatrici hanno equazione:

   $a = 0 \quad \longrightarrow \quad y - 3 = 0 \quad parabola\ degenere \quad (retta\ orizzontale)$

   $a \to \infty \quad \longrightarrow \quad x^2 = 0 \quad parabola\ degenere \quad (coppia\ di\ rette\ coincidenti\ verticali)$

5. Determiniamo i punti base:

   $\begin{cases} y - 3 = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3 \\ x = 0\ (sol.\ doppia) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad V\ (0; 3)$ (soluzione doppia)

   Il fascio ha solo un punto base, il vertice.

   Le parabole sono tutte tangenti nel vertice.

6. Disegniamo alcune parabole del fascio:

   $a = 1 \quad \longrightarrow \quad y = x^2 + 3$

   $a = -1 \quad \longrightarrow \quad y = -x^2 + 3$

   $a = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 3$

   $a = -\frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

Esercizio 362.342

Studia il seguente fascio di parabole: $kx^2 - y + (k-1)x = 0$

1. Determiniamo la forma canonica:

   $y = kx^2 + (k-1)x$

2. Determiniamo le coordinate dei vertici al variare del parametro k :

   $$x_V = -\frac{B}{2A} = -\frac{k-1}{2k} = \frac{1-k}{2k}$$

   $$y_V = k \cdot \frac{(1-k)^2}{4k^2} + (k-1) \cdot \frac{1-k}{2k} = \frac{(1-k)^2}{4k} - \frac{(1-k)^2}{2k} = \frac{(1-k)^2 - 2(1-k)^2}{4k} = -\frac{(1-k)^2}{4k}$$

   $$\Rightarrow \qquad V\left(\frac{1-k}{2k}; -\frac{(1-k)^2}{4k}\right)$$

   Il vertice dipende dal parametro k .

   Pertanto le parabole del fascio hanno il vertice variabile e l'asse di simmetria variabile .

3. Studiamo la concavità:

   Se $k > 0$ $\longrightarrow$ le parabole volgono la concavità verso l'alto.

   Se $k < 0$ $\longrightarrow$ le parabole volgono la concavità verso il basso.

   Se $k = 0$ $\longrightarrow$ la parabola è degenere: retta $y = -x$.

4. Determiniamo le parabole generatrici:

   Scriviamo il fascio di parabole come combinazione lineare:

   $kx^2 - y + (k-1)x = 0\,;$ $\qquad kx^2 - y + kx - x = 0\,;$

   $y + x + k \cdot (-x^2 - x) = 0\,;$

   Le parabole generatrici hanno equazione:

   $k = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -x$ la parabola è degenere

   $k \to \infty \quad \longrightarrow \quad -x^2 - x = 0\,; \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = -1 \end{matrix}$ coppia di rette

5. Determiniamo i punti base:

   $\begin{cases} y = -x \\ -x^2 - x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad x_2 = -1$

   $\Rightarrow \quad A\,(0; 0) \quad \wedge \quad B(-1\,; 1)$

   Il fascio ha due punti base.

   Le parabole sono tutte secanti nei punti base.

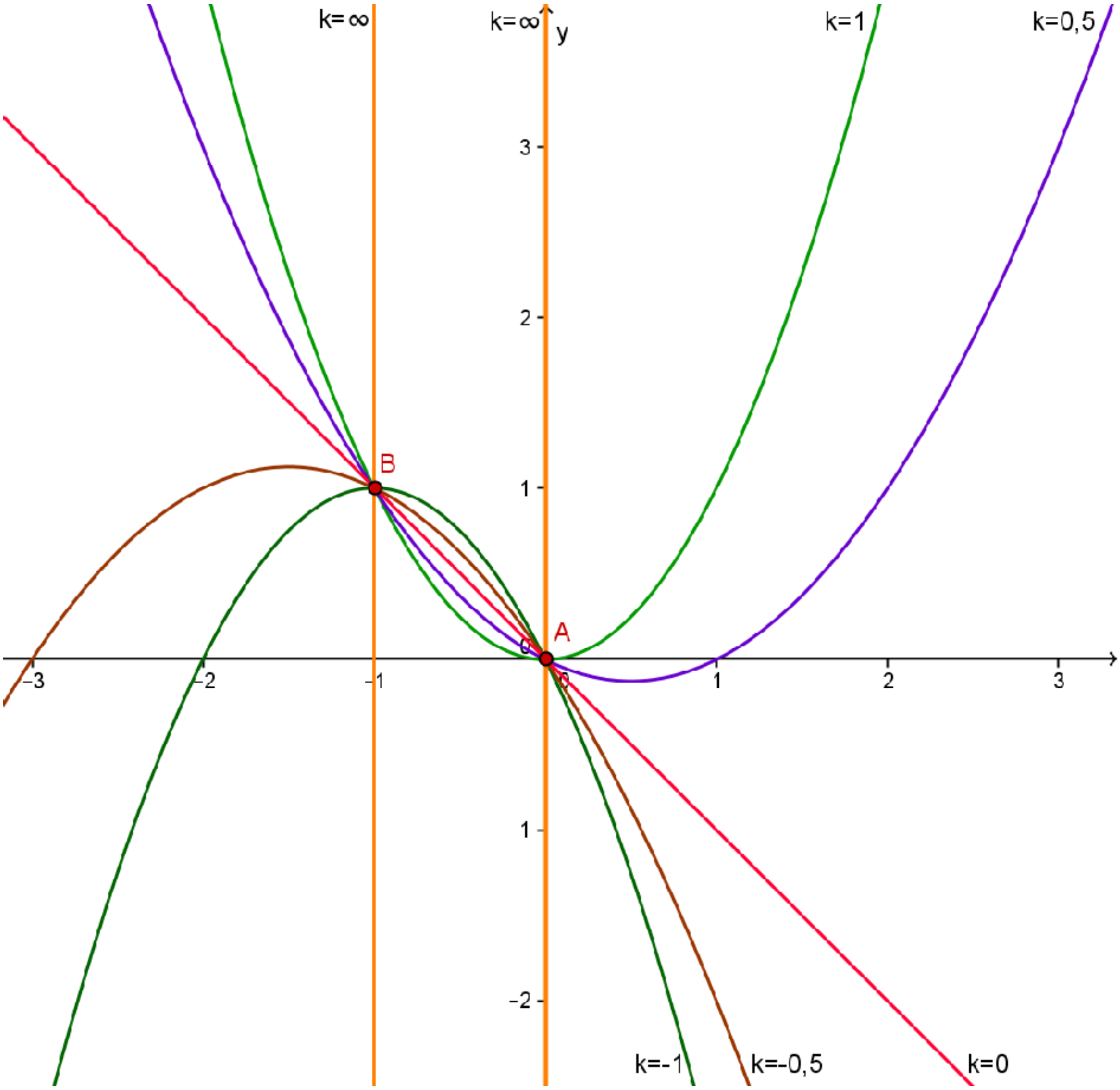
6. Disegniamo alcune parabole del fascio:

$k = 1 \quad \longrightarrow \quad y = x^2$

$k = -1 \quad \longrightarrow \quad y = -x^2 - 2x$

$k = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$k = -\frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$



Esercizio 362.344

Studia il seguente fascio di parabole: $(k-2)y + kx^2 - 2x + k = 0$

1. Determiniamo la forma canonica:

$Se \quad k \neq 2 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{k}{2-k}x^2 - \frac{2}{2-k}x + \frac{k}{2-k}$

$Se \quad k = 2 \quad \longrightarrow \quad 2x^2 - 2x + 2 = 0\,; \qquad x^2 - x + 1 = 0\,;$

2. Determiniamo le coordinate dei vertici al variare del parametro k :

$$x_V = -\frac{B}{2A} = \frac{2}{2-k} \cdot \frac{2-k}{2k} = \frac{1}{k}$$

$$y_V = \frac{k}{2-k} \cdot \frac{1}{k^2} - \frac{2}{2-k} \cdot \frac{1}{k} + \frac{k}{2-k} = \frac{1}{k \cdot (2-k)} - \frac{2}{k \cdot (2-k)} + \frac{k}{2-k} = \frac{1-2+k^2}{k \cdot (2-k)} = \frac{k^2-1}{k \cdot (2-k)}$$

$$\Rightarrow \qquad V\left(\frac{1}{k}; \frac{k^2-1}{k \cdot (2-k)}\right)$$

Il vertice dipende dal parametro k .

Pertanto le parabole del fascio hanno il vertice variabile e l'asse di simmetria variabile .

3. Studiamo la concavità:

$\frac{k}{2-k} > 0\,; \qquad \begin{matrix} k > 0 \\ k < 2 \end{matrix} \qquad 0 < k < 2$

Se $0 < k < 2$ $\longrightarrow$ le parabole volgono la concavità verso l'alto.

Se $k < 0 \quad \vee \quad k > 2$ $\longrightarrow$ le parabole volgono la concavità verso il basso.

Se $k = 0$ $\longrightarrow$ la parabola è degenere: retta $y = -x$.

4. Determiniamo le parabole generatrici:

Scriviamo il fascio di parabole come combinazione lineare:

$ky - 2y + kx^2 - 2x + k = 0\,;$

$-2y - 2x + k \cdot (y + x^2 + 1) = 0\,;$

Le parabole generatrici hanno equazione:

$k = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -x$ parabola degenere

$k \to \infty \quad \longrightarrow \quad y = -x^2 - 1$

5. Determiniamo i punti base:

$\begin{cases} y = -x \\ y = -x^2 - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ -x = -x^2 - 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -x \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$ Nessuna soluzione reale

Il fascio non ha punti base.

6. Disegniamo alcune parabole del fascio:

$k = 1 \qquad \longrightarrow \qquad y = x^2 - 2x + 1$

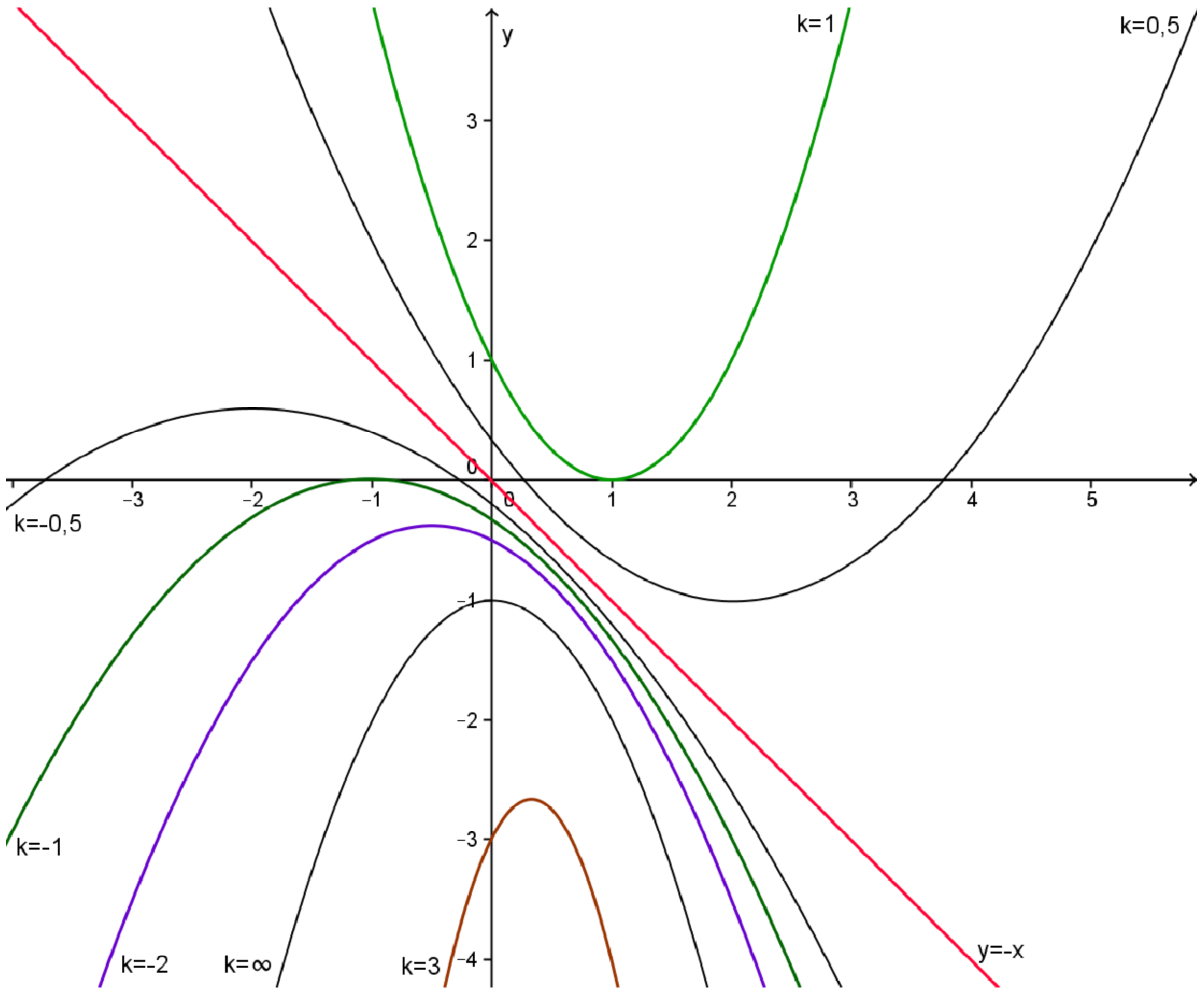
$k = -1 \qquad \longrightarrow \qquad y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$k = \frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \qquad y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

$k = -\frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \qquad y = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}$

$k = -2 \qquad \longrightarrow \qquad y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$k = 3 \qquad \longrightarrow \qquad y = -3x^2 + 2x - 3$



Esercizio 362.347

Studia il seguente fascio di parabole: $x^2 + 2(m-2)x - (m+1)y + 4 - 5m = 0$

1. Determiniamo la forma canonica:

$Se \quad m \neq -1 \qquad \longrightarrow \qquad y = \frac{1}{m+1}x^2 + \frac{2(m-2)}{m+1}x + \frac{4-5m}{m+1}$

$Se \quad m = -1 \qquad \longrightarrow \qquad x^2 - 6x + 9 = 0\ ; \qquad (x-3)^2 = 0$ coppia di rette coincidenti.

2. Determiniamo le coordinate dei vertici al variare del parametro k :

$x_V = -\frac{B}{2A} = -\frac{2(m-2)}{m+1} \cdot \frac{m+1}{2} = 2 - m$

$y = \frac{1}{m+1} \cdot (2-m)^2 + \frac{2(m-2)}{m+1} \cdot (2-m) + \frac{4-5m}{m+1} = \frac{(2-m)^2}{m+1} - \frac{2(2-m)^2}{m+1} + \frac{4-5m}{m+1} =$

$= \frac{(2-m)^2 - 2(2-m)^2 + 4 - 5m}{m+1} = \frac{-(2-m)^2 + 4 - 5m}{m+1} = \frac{-4 - m^2 + 4m + 4 - 5m}{m+1} =$

$= \frac{-m^2 - m}{m+1} = \frac{-m \cdot (m+1)}{m+1} = -m$

$\Rightarrow \qquad V\,(2-m\ ;\ -m)$

Il vertice dipende dal parametro m .

Pertanto le parabole del fascio hanno il vertice variabile e l'asse di simmetria variabile .

3. Studiamo la concavità:

$\frac{1}{m+1} > 0\ ; \qquad m > -1$

Se $m > -1 \quad \longrightarrow \quad$ le parabole volgono la concavità verso l'alto.

Se $m < -1 \quad \longrightarrow \quad$ le parabole volgono la concavità verso il basso.

Se $m = -1 \quad \longrightarrow \quad$ la parabola è degenere: $(x-3)^2 = 0$ coppia di rette coincidenti.

4. Determiniamo le parabole generatrici:

Scriviamo il fascio di parabole come combinazione lineare:

$x^2 + 2(m-2)x - (m+1)y + 4 - 5m = 0$

$x^2 + 2mx - 4x - my - y + 4 - 5m = 0$

$-y + x^2 - 4x + 4 + m \cdot (-y + 2x - 5) = 0$

Le parabole generatrici hanno equazione:

$k = 0 \qquad \longrightarrow \qquad y = x^2 - 4x + 4$

$k \to \infty \qquad \longrightarrow \qquad y = 2x - 5$

5. Determiniamo i punti base:

$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 2x - 5 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)^2 = 0 \ \ (soluzione\ doppia) \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A\,(3\,;1)$ (soluzione doppia)

Il fascio ha un punto base.

Le parabole sono tutte tangenti al punto base.

6. Disegniamo alcune parabole del fascio:

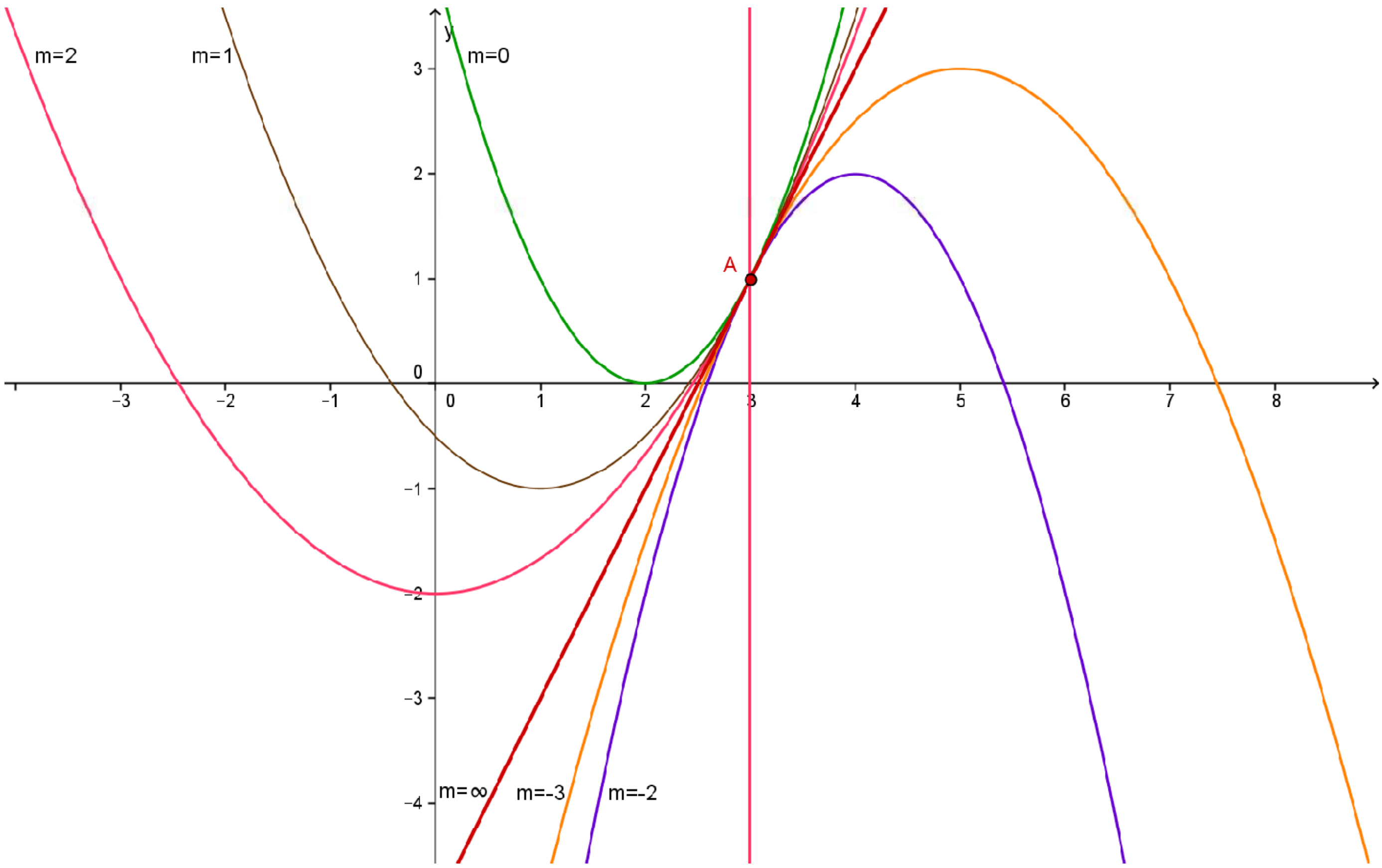
$m = 0 \qquad \longrightarrow \qquad y = x^2 - 4x + 4$

$m = 1 \qquad \longrightarrow \qquad y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}$

$m = 2 \qquad \longrightarrow \qquad y = \frac{1}{3}x^2 - 2$

$m = -2 \qquad \longrightarrow \qquad y = -x^2 + 8x - 14$

$m = -3 \qquad \longrightarrow \qquad y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{19}{2}$



Esercizio 362.350

Studia il seguente fascio di parabole: $(1+m)x^2-4x+(1-m)y+3-m=0$

1. Determiniamo la forma canonica:

$Se \quad m \neq 1 \qquad \longrightarrow \qquad y=\dfrac{1+m}{m-1}x^2-\dfrac{4}{m-1}x+\dfrac{3-m}{m-1}$

$Se \quad m=1 \qquad \longrightarrow \qquad 2x^2-4x+2=0\,; \qquad x^2-2x+1=0\,; \qquad (x-1)^2=0$ coppia di rette coincidenti

2. Determiniamo le coordinate dei vertici al variare del parametro m :

$$x_V=-\frac{B}{2A}=\frac{4}{m-1}\cdot\frac{m-1}{2(1+m)}=\frac{2}{1+m}$$

$$y=\frac{1+m}{m-1}\cdot\frac{4}{(1+m)^2}-\frac{4}{m-1}\cdot\frac{2}{1+m}+\frac{3-m}{m-1}=\frac{4}{m^2-1}-\frac{8}{m^2-1}+\frac{3-m}{m-1}=$$

$$=\frac{4-8+(3-m)(m+1)}{m^2-1}=\frac{4-8+3m+3-m^2-m}{m^2-1}=\frac{-1+2m-m^2}{m^2-1}=\frac{-(m-1)^2}{m^2-1}=\frac{1-m}{m+1}$$

$$\Rightarrow \qquad V\left(\frac{2}{1+m}\ ;\ \frac{1-m}{m+1}\right)$$

Il vertice dipende dal parametro m .

Pertanto le parabole del fascio hanno il vertice variabile e l'asse di simmetria variabile .

3. Studiamo la concavità:

$\dfrac{1+m}{m-1}>0\,; \qquad \dfrac{1+m}{m-1}>0\,; \qquad \begin{matrix} m>-1 \\ m>+1 \end{matrix} \qquad m<-1 \ \vee \ m>1$

Se $m<-1 \ \vee \ m>1 \qquad \longrightarrow \qquad$ le parabole volgono la concavità verso l'alto.

Se $-1<x<1 \qquad \longrightarrow \qquad$ le parabole volgono la concavità verso il basso.

Se $m=-1 \qquad \longrightarrow \qquad$ la parabola è degenere: $-4x+2y+4=0\,; \qquad y=2x-2$.

4. Determiniamo le parabole generatrici:

Scriviamo il fascio di parabole come combinazione lineare:

$(1+m)x^2-4x+(1-m)y+3-m=0\,;$

$x^2+mx^2-4x+y-my+3-m=0\,;$

$y+x^2-4x+3+m(x^2-y-1)=0\,;$

Le parabole generatrici hanno equazione:

$m=0 \qquad \longrightarrow \qquad y=-x^2+4x-3$

$m\to\infty \qquad \longrightarrow \qquad y=x^2-1$

5. Determiniamo i punti base:

$\begin{cases} y=-x^2+4x-3 \\ y=x^2-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-1=-x^2+4x-3 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2-4x+2=0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ - \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)^2=0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \ \ (soluzione\ doppia) \\ y=1^2-1=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A\,(1\,;0)$ (soluzione doppia)

Il fascio ha un punto base.

Le parabole sono tutte tangenti al punto base.

6. Disegniamo alcune parabole del fascio:

$m = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -x^2 + 4x - 3$

$m \to \infty \quad \longrightarrow \quad y = x^2 - 1$

$m = 2 \quad \longrightarrow \quad y = 3x^2 - 4x + 1$

$m = -2 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

$m = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad y = -3x^2 + 8x - 5$

$m = -\frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{7}{3}$