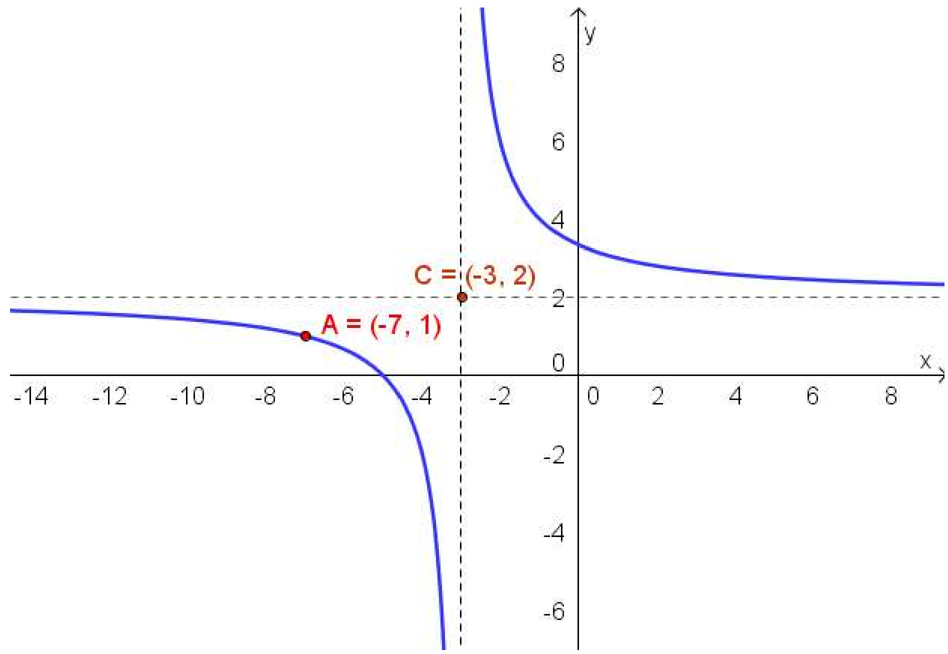
CONICHE

Esercizio 526.70

1. Determina l'equazione della funzione omografica γ passante per il punto $A\,(-7\,,1)$ e avente per asintoti le rette di equazioni: $y = 2$ e $x = -3$.
2. Determina l'equazione della circonferenza avente centro nel centro di simmetria della funzione omografica γ e raggio $2\sqrt{2}$.
3. Trova le intersezioni tra l'iperbole e la circonferenza e individua le tangenti nei punti comuni.
4. Indica con F_1 e F_2 i fuochi dell'iperbole e calcola L'area del triangolo AF_1F_2 .



Punto 1 – Primo metodo

Nota

Pur essendo l'equazione della funzione omografica $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ costituita da quattro parametri: a, b, c, d, per determinare la sua equazione occorrono soltanto tre parametri indipendenti.
Infatti, essendo l'equazione definita per $c \neq 0$ è possibile dividere numeratore e denominatore per $c \neq 0$.

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{\frac{c}{c}x + \frac{d}{c}} \; ; \qquad y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} \; ; \qquad \text{ponendo:} \begin{cases} \frac{a}{c} = h \\ \frac{b}{c} = k \\ \frac{d}{c} = m \end{cases} \qquad \text{si ottiene la forma:} \qquad y = \frac{h\,x + k}{x + m}$$

La funzione omografica ha la seguente equazione in forma ridotta : $y = \dfrac{h\,x + k}{x + m}$

Utilizziamo la conoscenza delle equazioni dei due asintoti $x + 3 = 0$ *e* $y = 2$ *e il passaggio per il punto* $\mathrm{A}\,(-7\,,1)$ *per impostare il seguente sistema:*

$$\begin{cases} m = 3 \\ h = 2 \\ 1 = \dfrac{h\,\cdot(-7) + k}{(-7) + m} \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ --- \\ 1 = \dfrac{-7h\, + k}{-7 + m} \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ --- \\ 1 = \dfrac{-7\cdot 2\, + k}{-7 + 3} \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ --- \\ 1 = \dfrac{-14\, + k}{-4} \end{cases} \qquad \begin{cases} --- \\ --- \\ -4 = -14\, + k \end{cases} \qquad \begin{cases} m = 3 \\ h = 2 \\ k = 10 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della funzione omografica richiesta è : $y = \dfrac{2\,x + 10}{x + 3}$.

Punto 1 – Secondo metodo

La funzione omografica cercata è la funzione traslata dell'iperbole equilatera $x \cdot y = k$ *secondo il vettore* $\vec{v}\,(-3\,;2)$.

Applicando le equazioni della traslazione $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ *con formule inverse* $\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 2 \end{cases}$ *si ottiene:*

$(x' + 3) \cdot (y' - 2) = k\,;$ $\qquad y' - 2 = \dfrac{k}{x' + 3}\,;$ $\qquad y' = \dfrac{k}{x' + 3} + 2\,;$ $\qquad y' = \dfrac{k + 2x' + 6}{x' + 3}.$

Imponendo il passaggio per il punto $\mathrm{A}\,(-7\,,1)$ *si ricava:*

$1 = \dfrac{k + 2 \cdot (-7) + 6}{-7 + 3}\,;$ $\qquad 1 = \dfrac{k - 8}{-4}\,;$ $\qquad k - 8 = -4\,;$ $\qquad k = 4\,.$

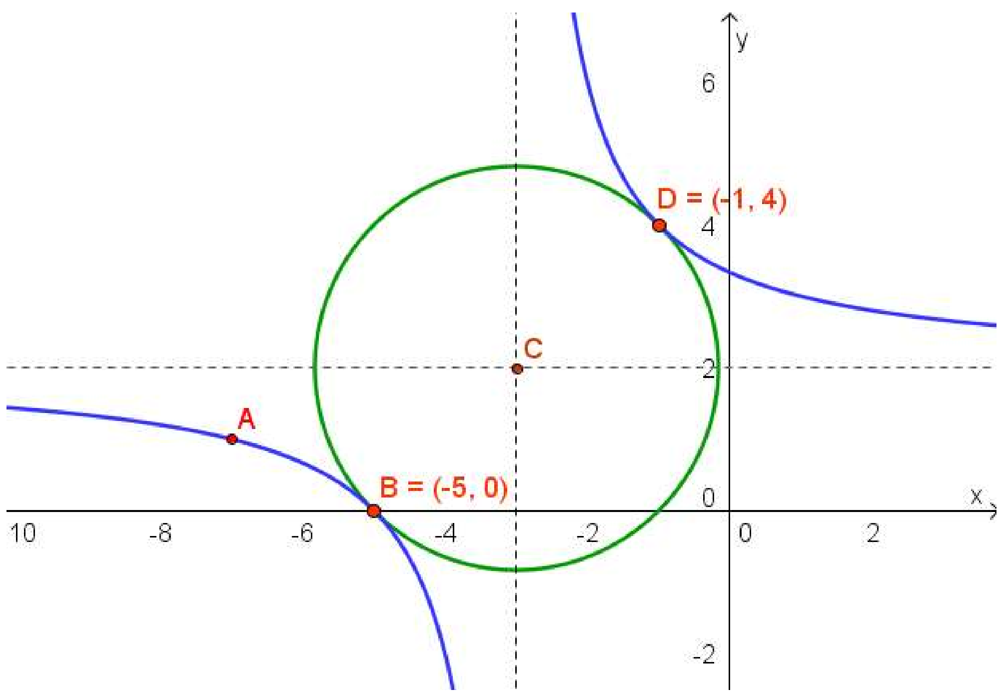
Sostituendo $k = 4$ *nell'equazione ricavata precedentemente si ottiene* $y' = \dfrac{4 + 2\,x' + 6}{x' + 3}$.

Pertanto l'equazione della funzione omografica richiesta è : $y = \dfrac{2\,x + 10}{x + 3}$.

Punto 2

Il centro di simmetria della funzione omografica γ *ha coordinate* $C\,(-3\,;2)$.
L'equazione della circonferenza è :

$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2\,;$ $\qquad (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2\,;$ $\qquad x^2 + 9 + 6x + y^2 + 4 - 4y = 8\,;$
$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 5 = 0\,.$



Punto 3

Determiniamo le intersezioni fra le due curve risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} x^2+y^2+6x-4y+5=0 \\ y=\dfrac{2\,x+10}{x+3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+\left(\dfrac{2\,x+10}{x+3}\right)^2+6x-4\cdot\dfrac{2\,x+10}{x+3}+5=0 \; ; \\ ——— \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{(2\,x+10)^2}{(x+3)^2}+6x-4\cdot\dfrac{2\,x+10}{x+3}+5=0 \\ ——— \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2\cdot(x+3)^2+(2\,x+10)^2+6x\cdot(x+3)^2-4\cdot(2\,x+10)\cdot(x+3)+5\cdot(x+3)^2=0 \\ ——— \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4+9x^2+6x^3+4x^2+100+40x+6x^3+54x+36x^2-4\cdot(2x^2+6x+10x+30)+5x^2+45+30x=0 \\ ——— \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4+9x^2+6x^3+4x^2+100+40x+6x^3+54x+36x^2-8x^2-24x-40x-120+5x^2+45+30x=0 \\ ——— \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4+12x^3+46x^2+60x+25=0 \\ ——— \end{cases}$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$=(x+1)(x^3+11x^2+35x+25)=0$$

	1	$+12$	$+46$	$+60$	$+25$
-1		-1	-11	-35	-25
	1	$+11$	$+35$	$+25$	$=$

Applicando di nuovo la regola di Ruffini si ha:

$$(x+1)(x+5)(x^2+6x+5)=0$$

	1	$+11$	$+35$	$+25$
-5		-5	-30	-25
	1	$+6$	$+5$	0

$$(x+1)(x+5)(x^2+6x+5)=0 \qquad \begin{array}{ll} x+1=0 & x_1=-1 \\ x+5=0 & x_2=-5 \\ x^2+6x+5=0 & x_3=-1 \;\wedge\; x_4=-5 \end{array}$$

Infatti: $x^2+6x+5=0$; $\quad \frac{\Delta}{4}=9-5=4 \quad x_{3,4}=-3\mp\sqrt{4}=\begin{array}{l} x_3=-1 \\ x_4=-5 \end{array}$

Pertanto i punti di intersezione sono: $B\,(-5\,;0)$ *e* $D\,(-1\,;4)$

I punti B e D sono punti doppi, cioè la circonferenza e la funzione omografica hanno in questi punti la stessa retta tangente (bitangenti).

La tangente alla circonferenza nel punto B $(-5\,;0)$ *ha equazione:*

$$x_0x+y_0y+6\cdot\frac{x_0+x}{2}-4\cdot\frac{y_0+y}{2}+5=0\;; \qquad -5x+0\cdot y+6\cdot\frac{-5+x}{2}-4\cdot\frac{0+y}{2}+5=0\;;$$

$$-5x-15+3x-2y+5=0\;; \qquad -2x-2y-10=0\;; \qquad x+y+5=0\;;$$

La tangente alla circonferenza nel punto D $(-1\,;4)$ *ha equazione:*

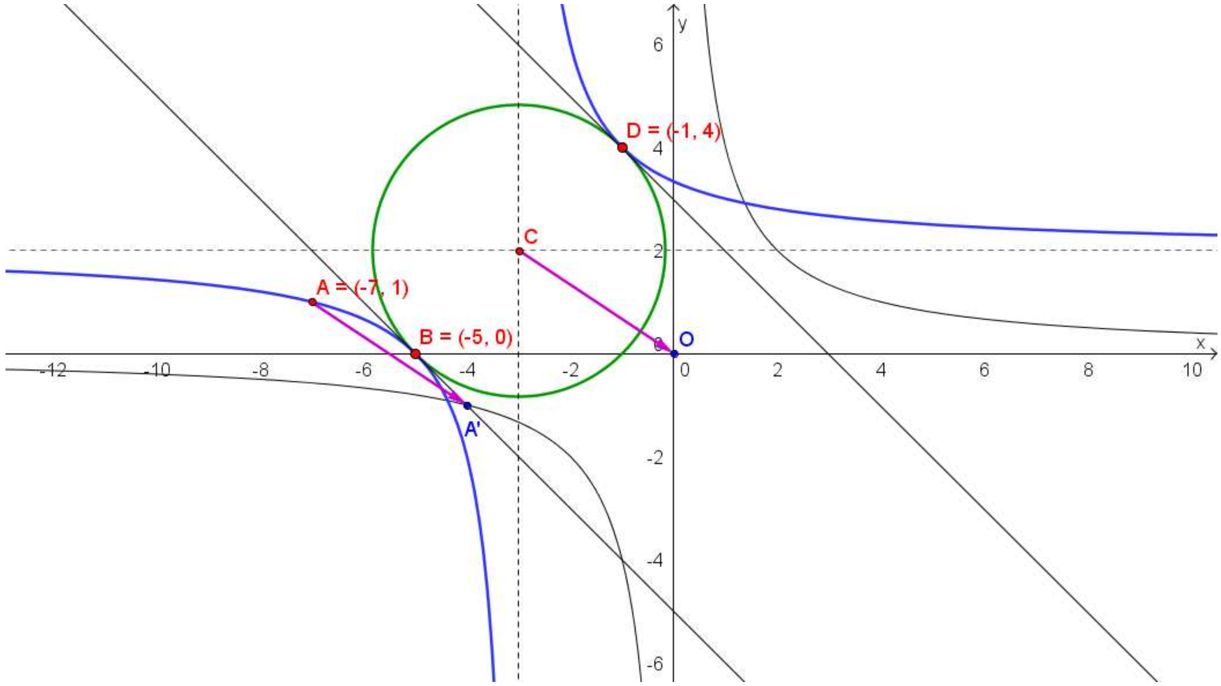
$$x_0x+y_0y+6\cdot\frac{x_0+x}{2}-4\cdot\frac{y_0+y}{2}+5=0\;; \qquad -1x+4\cdot y+6\cdot\frac{-1+x}{2}-4\cdot\frac{4+y}{2}+5=0\;;$$

$$-x+4y-3+3x-8-2y+5=0\;; \qquad 2x+2y-6=0\;; \qquad x+y-3=0\;;$$

Punto 4 – Primo metodo

Effettuiamo una traslazione che porta il centro di simmetria della funzione omografica nell'origine.

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 2 \end{cases}$ *Le formule inverse sono:* $\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 2 \end{cases}$



Sostituendo si ottiene:

$y = \dfrac{2\,x + 10}{x + 3}$; $\quad y' + 2 = \dfrac{2\,(x' - 3) + 10}{(x' - 3) + 3}$; $\quad y' + 2 = \dfrac{2\,x' - 6 + 10}{x'}$; $\quad y' = \dfrac{2\,x' + 4}{x'} - 2$;

$y' = \dfrac{2\,x' + 4 - 2x'}{x'}$; $\quad y' = \dfrac{4}{x'}$.

Eliminando gli apici: $\quad y = \dfrac{4}{x} \qquad xy = 4 \quad con\ k = 4$.

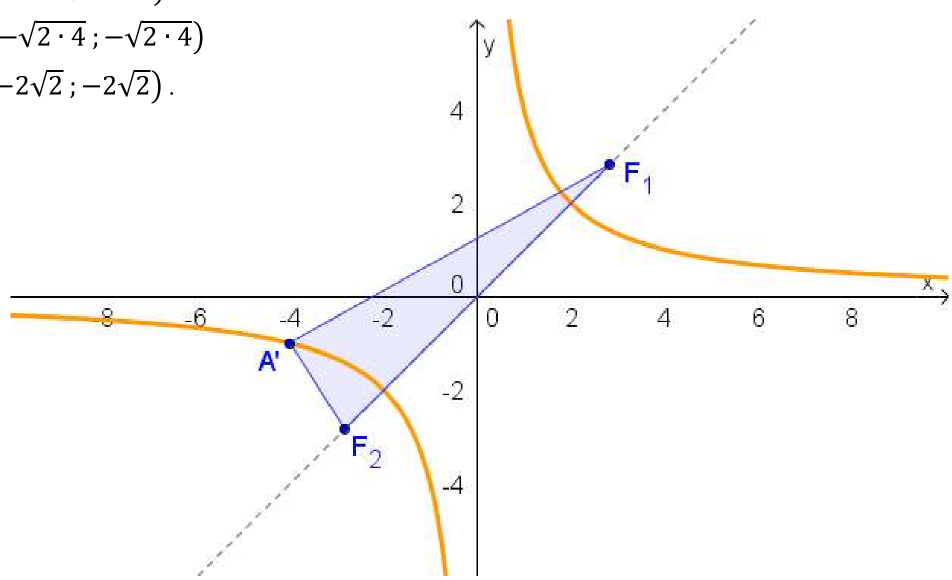
Nella traslazione anche il punto A cambia coordinate $\quad A(-7 + 3\,;1 - 2) \;\longrightarrow\; A'(-4\,;-1)$.

I fuochi dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti hanno coordinate:

$F_1' = \left(\sqrt{2k}\,;\sqrt{2k}\right) \qquad e \qquad F_2' = \left(-\sqrt{2k}\,;-\sqrt{2k}\right)$

$F_1' = \left(\sqrt{2 \cdot 4}\,;\sqrt{2 \cdot 4}\right) \qquad e \qquad F_2' = \left(-\sqrt{2 \cdot 4}\,;-\sqrt{2 \cdot 4}\right)$

$F_1' = \left(2\sqrt{2}\,;2\sqrt{2}\right) \qquad e \qquad F_2' = \left(-2\sqrt{2}\,;-2\sqrt{2}\right)$.



L'area del triangolo è:

$$S_{A'F_1F_2} = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_{F_1} - x_{F_2} & y_{F_1} - y_{F_2} \\ x_{A'} - x_{F_2} & y_{A'} - y_{F_2} \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\ -4 + 2\sqrt{2} & -1 + 2\sqrt{2} \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \left[4\sqrt{2} \cdot \left(-1 + 2\sqrt{2}\right) - \left(-4 + 2\sqrt{2}\right) \cdot 4\sqrt{2} \right] \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \left[-4\sqrt{2} + 16 + 16\sqrt{2} - 16 \right] \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \left[12\sqrt{2} \right] \right| = 6\sqrt{2}\,.$$

__Punto 4 – Secondo metodo__

Determiniamo le coordinate dei fuochi della funzione omografica $y = \frac{2x+10}{x+3}$

Confrontando tale equazione con l'equazione $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ *si ricava* $a = 2 \quad b = 10 \quad c = 1 \quad d = 3$.

Calcoliamo $k = \frac{bc-ad}{c^2} = \frac{10\cdot 1 - 2\cdot 3}{1^2} = 4$.

Determiniamo le coordinate dei fuochi:

$$F_1\left(\sqrt{2k} - \frac{d}{c}\,;\ \sqrt{2k} + \frac{a}{c}\right) \equiv \left(\sqrt{2\cdot 4} - 3\,;\ \sqrt{2\cdot 4} + 2\right) \equiv \left(2\sqrt{2} - 3\,;\ 2\sqrt{2} + 2\right)$$

$$F_2\left(-\sqrt{2k} - \frac{d}{c};\ -\sqrt{2k} + \frac{a}{c}\right) \equiv \left(-\sqrt{2\cdot 4} - 3\,;\ -\sqrt{2\cdot 4} + 2\right) \equiv \left(-2\sqrt{2} - 3\,;\ -2\sqrt{2} + 2\right)$$

L'area del triangolo è:

$$S_{AF_1F_2} = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_{F_1} - x_{F_2} & y_{F_1} - y_{F_2} \\ x_A - x_{F_2} & y_A - y_{F_2} \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2\sqrt{2} - 3 - \left(-2\sqrt{2} - 3\right) & 2\sqrt{2} + 2 - \left(-2\sqrt{2} + 2\right) \\ -7 - \left(-2\sqrt{2} - 3\right) & 1 - \left(-2\sqrt{2} + 2\right) \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} - 4 & 2\sqrt{2} - 1 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \left[4\sqrt{2} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right) - 4\sqrt{2} \cdot \left(2\sqrt{2} - 4\right) \right] \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \left[16 - 4\sqrt{2} - 16 + 16\sqrt{2} \right] \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \left[12\sqrt{2} \right] \right| = 6\sqrt{2}\,.$$

Esercizio 510.337

Traccia il grafico delle funzione: $y = \frac{2|x|+6}{x-4}$

<u>*Soluzione*</u>

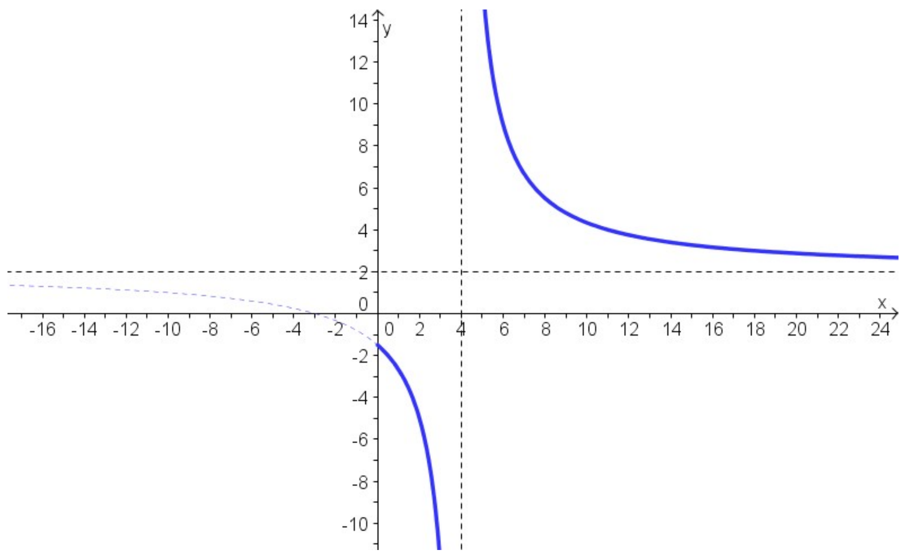
$$y = \frac{2|x|+6}{x-4} = \begin{cases} \dfrac{2x+6}{x-4} & x \geq 0 \\ \dfrac{-2x+6}{x-4} & x < 0 \end{cases}$$

Tracciamo il grafico della funzione omografica $y = \dfrac{2x+6}{x-4}$ *nell'intervallo* $[0\,,+\infty[$

Gli asintoti della funzione hanno equazioni: $x - 4 = 0$ *e* $y = 2$.

Le intersezioni con gli assi cartesiani sono:

$\begin{cases} y = \frac{2x+6}{x-4} \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $A\left(0\,;\,-\frac{3}{2}\right)$ $\begin{cases} y = \frac{2x+6}{x-4} \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = 2x+6 \\ y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $B(-3\,;\,0)$

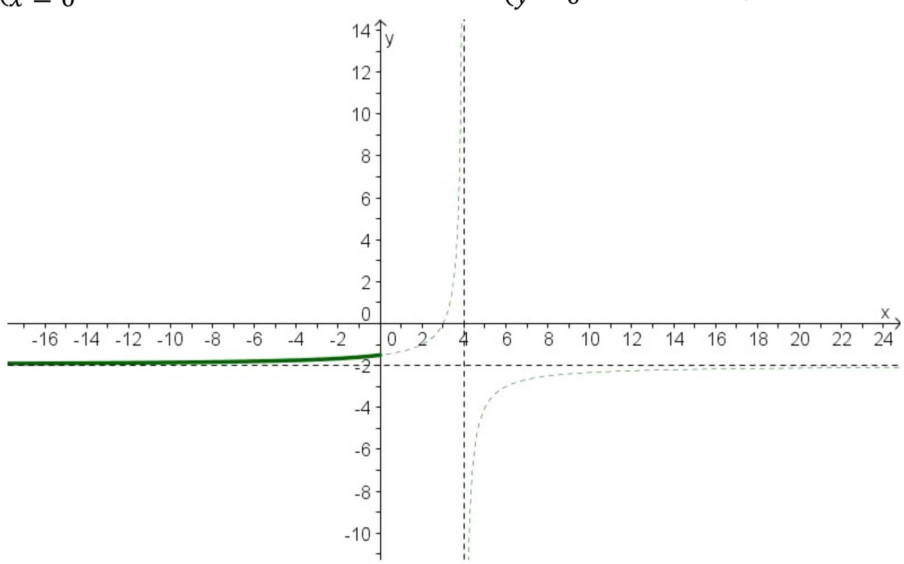


Tracciamo il grafico della funzione omografica $y = \dfrac{-2x+6}{x-4}$ *nell'intervallo* $]-\infty\,,0]$

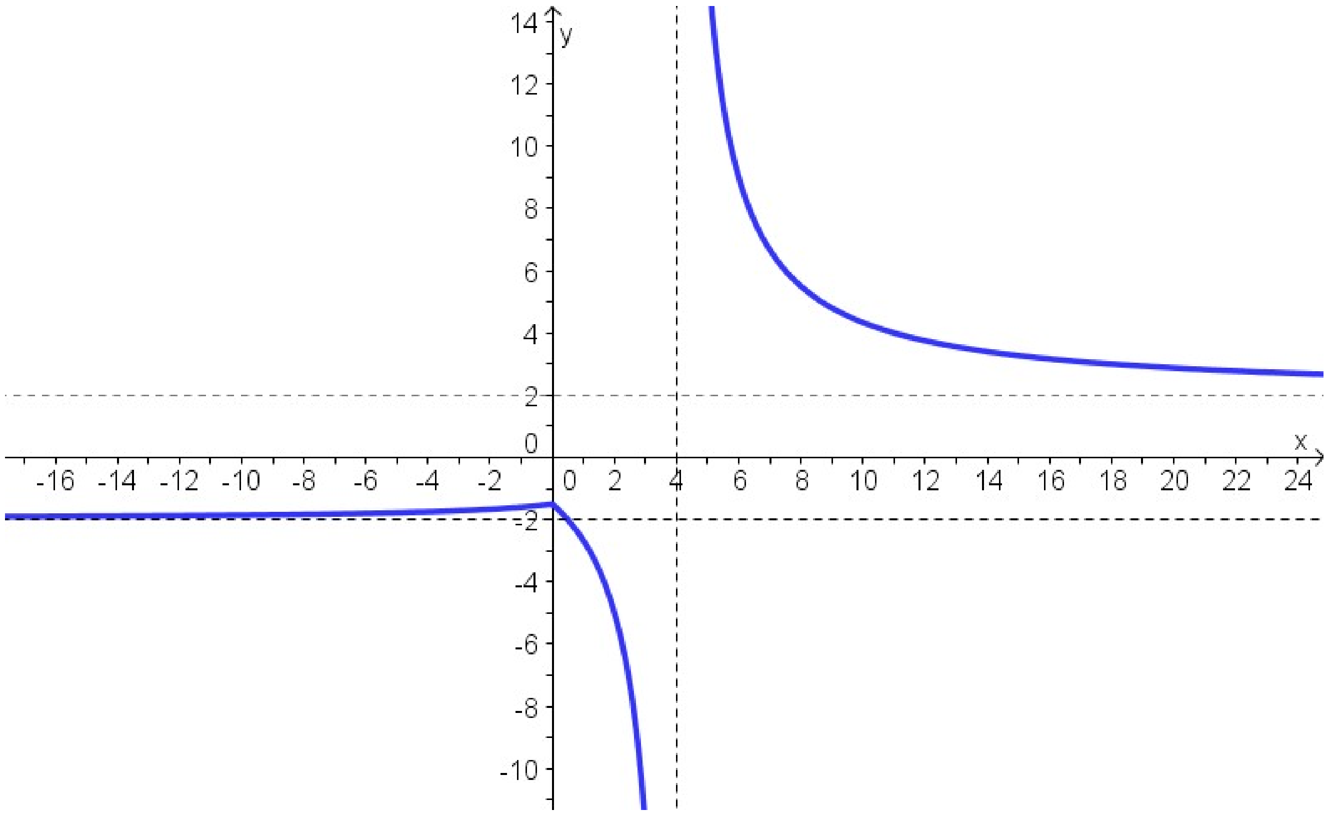
Gli asintoti della funzione hanno equazioni: $x - 4 = 0$ *e* $y = -2$.

Le intersezioni con gli assi cartesiani sono:

$\begin{cases} y = \frac{-2x+6}{x-4} \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $A\left(0\,;\,-\frac{3}{2}\right)$ $\begin{cases} y = \frac{-2x+6}{x-4} \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = -2x+6 \\ y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $C\,(3\,;\,0)$



Dall'unione dei due grafici si ottiene il grafico della funzione richiesta.



Esercizio 547.19

Studia e rappresenta graficamente la conica di equazione: $-5y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$

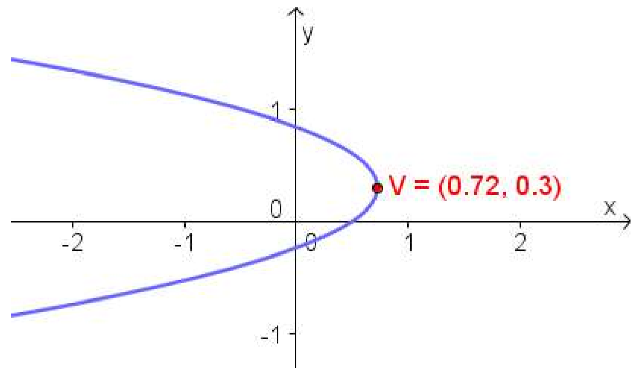
<u>Soluzione</u>

L'equazione può essere riscritta nella seguente forma:

$2x = -5y^2 + 3y + 1\,;\qquad x = -\frac{5}{2}y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$

Essa rappresenta una parabola con asse parallelo all'asse delle x.

Vertice in $V\left(\frac{29}{40}\,;\,\frac{3}{10}\right)$



$y_V = -\frac{\frac{3}{2}}{2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

$x_V = -\frac{\Delta}{4\cdot a} = -\frac{\frac{9}{4}-4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{\frac{9}{4}+5}{-10} = \frac{29}{40}$

Intersezioni con gli assi cartesiani in:

$\begin{cases} x = -\frac{5}{2}y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}\qquad \begin{cases} 5y^2 - 3y - 1 = 0 \\ --- \end{cases}$

$\begin{cases} y_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{29}}{10} \\ --- \end{cases}\qquad A\left(0\,;\,\frac{3-\sqrt{29}}{10}\right)\qquad B\left(0\,;\,\frac{3+\sqrt{29}}{10}\right)$

$\begin{cases} x = -\frac{5}{2}y^2 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}\qquad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}\qquad C\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$

Esercizio 547.20

Studia e rappresenta graficamente la conica di equazione: $-2x^2 + y^2 - 6x - 5y + 3 = 0$

Soluzione

L'equazione può essere riscritta nella seguente forma:

$2x^2 - y^2 + 6x + 5y - 3 = 0$; $(2x^2 + 6x) - (y^2 - 5y) - 3 = 0$;

$2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) - \left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) - 3 = \frac{9}{2} - \frac{25}{4}$; $2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$;

$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{5}{8}} - \frac{\left(y - \frac{5}{2}\right)^2}{\frac{5}{4}} = 1$; *che è del tipo* $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

Si tratta di una iperbole con asse trasverso parallelo all'asse x immagine dell'iperbole $\frac{x^2}{\frac{5}{8}} - \frac{y^2}{\frac{5}{4}} = 1$ *nella traslazione di vettore* $\vec{v}\left(-\frac{3}{2} ; +\frac{5}{2}\right)$.

Il centro di simmetria ha coordinate: $O'(p ; q)$ *cioè* $O'\left(-\frac{3}{2} ; +\frac{5}{2}\right)$.

I vertici reali hanno coordinate:

$V_1\,(p + a;\ q)$ $V_2\,(p - a;\ q)$ *cioè* $V_1\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{8}} \ ;\ \frac{5}{2}\right)$ $V_2\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{5}{8}} \ ;\ \frac{5}{2}\right)$

Gli asintoti hanno equazione:

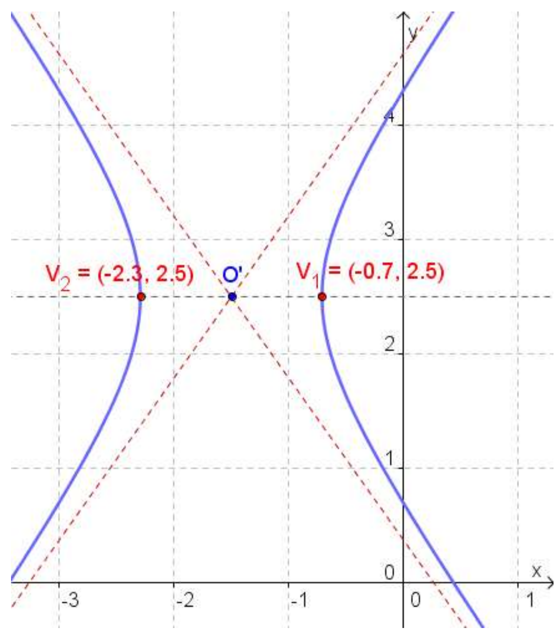
$y - q = \pm\frac{b}{a}(x - p)$;

$y - \frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{\sqrt{\frac{5}{8}}}\left(x + \frac{3}{2}\right)$; $y = \pm\sqrt{2}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2}$;

$$\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{2}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2} ; \\ y = +\sqrt{2}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2} ; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{2}x - \sqrt{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{5}{2} ; \\ y = +\sqrt{2}x + \sqrt{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{5}{2} ; \end{array}\right.$$

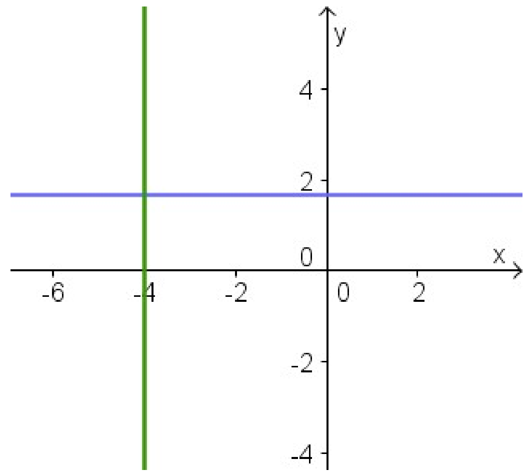
$$\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{2}x - \frac{5 - 3\sqrt{2}}{2} ; \\ y = +\sqrt{2}x + \frac{5 + 3\sqrt{2}}{2} ; \end{array}\right.$$

Il suo grafico è rappresentato a lato.



Esercizio 549.34

Riconosci la conica degenere di equazione: $3xy - 5x + 12y - 20 = 0$



Soluzione

L'equazione $3xy - 5x + 12y - 20 = 0$

può essere riscritta nella seguente forma:

$x \cdot (3y - 5) + 4 \cdot (3y - 5) = 0$; $\quad (3y - 5) \cdot (x + 4) = 0$.

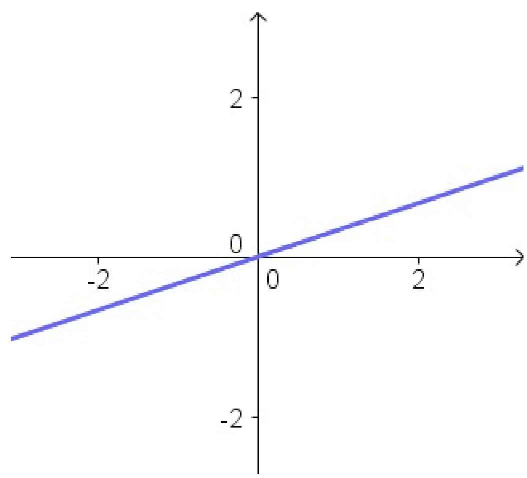
Essa rappresenta una coppia di rette incidenti di equazioni:

$3y - 5 = 0$ *e* $x + 4 = 0$.

Pertanto la conica è una iperbole equilatera degenere coincidente con i propri asintoti.

Esercizio 549.35

Riconosci la conica degenere di equazione: $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$



Soluzione

L'equazione data può essere riscritta nella seguente forma:

$(x - 3y)^2 = 0$; $\quad (x - 3y)(x - 3y) = 0$.

Essa rappresenta una coppia di rette coincidenti di equazioni

$x - 3y = 0$.

Esercizio 549.36

Riconosci la conica degenere di equazione: $x^2 + 4y^2 - 2x + 1 = 0$

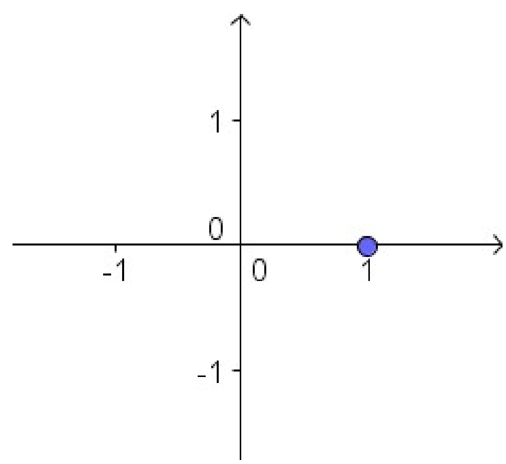
Soluzione 1

$\left[A \cdot B > 0 \quad \wedge \quad \delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E = 0\right] \implies$ *Ellisse degenere nel punto* $C\left(-\frac{C}{2A} ; -\frac{D}{2B}\right)$.

Infatti

$A \cdot B = 1 \cdot 4 = 4 > 0 \quad \wedge \quad \delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E = \frac{(-2)^2}{4 \cdot 1} + \frac{0^2}{4 \cdot 4} - 1 = 0$

$C\left(-\frac{-2}{2 \cdot 1} ; -\frac{0}{2 \cdot 4}\right) \equiv (1 ; 0)$.



Soluzione 2

L'equazione data può essere riscritta nella seguente forma:

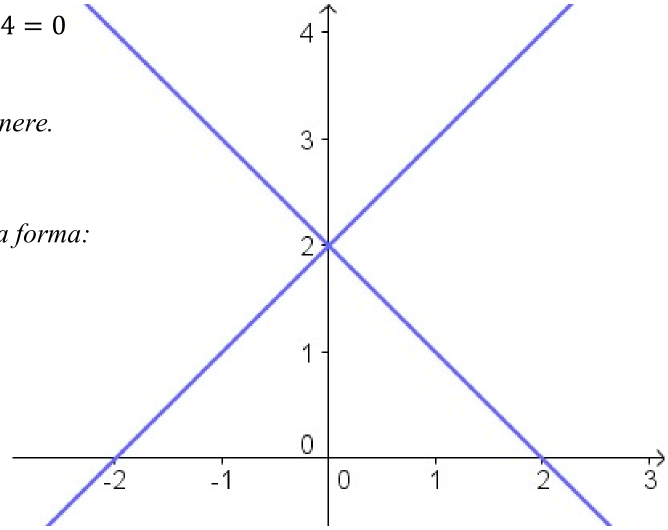
$(x - 1)^2 + 4y^2 = 0$;

Essa rappresenta il punto $P\,(1 ; 0)$

Pertanto la conica è un'ellisse degenere.

Esercizio 549.37

Riconosci la conica degenere di equazione: $x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$



Soluzione

$\left[A \cdot B < 0 \quad \wedge \quad \delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E = 0\right] \quad \Longrightarrow$ *Iperbole degenere.*

Coppia di rette incidenti nel punto $C\left(-\frac{C}{2A}\ ;\ -\frac{D}{2B}\right)$.

L'equazione $x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$ *può essere riscritta nella forma:*

$x^2 - (y^2 - 4y + 4) = 0$;

$x^2 - (y - 2)^2 = 0$;

$[x + (y - 2)] \cdot [x - (y - 2)] = 0$;

$(x + y - 2) \cdot (x - y + 2) = 0$; .

Essa rappresenta una coppia di rette incidenti di equazioni:

$x + y - 2 = 0$ *e* $x - y + 2 = 0$.

Pertanto la conica è una iperbole equilatera degenere.

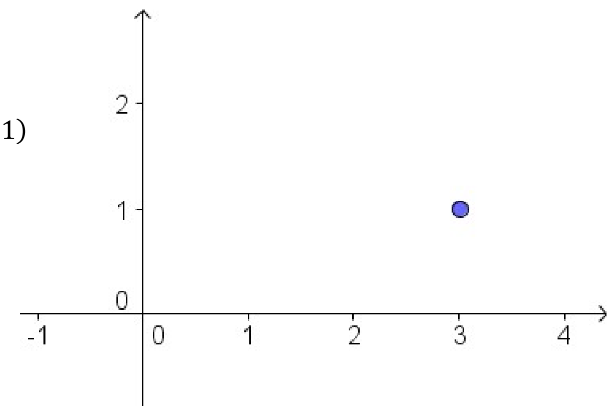
Esercizio 549.38

Riconosci la conica degenere di equazione: $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 = 0$

Soluzione 1

$\left[A \cdot B > 0 \quad \wedge \quad \delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E = 0\right] \quad \Longrightarrow$

Ellisse (circonferenza) degenere nel punto $C\left(-\frac{C}{2A}\ ;\ -\frac{D}{2B}\right) \equiv (3\ ;1)$



Soluzione 2

L'equazione data può essere riscritta nella seguente forma:

$(x^2 - 6x) + (y^2 - 2y) + 10 = 0$;

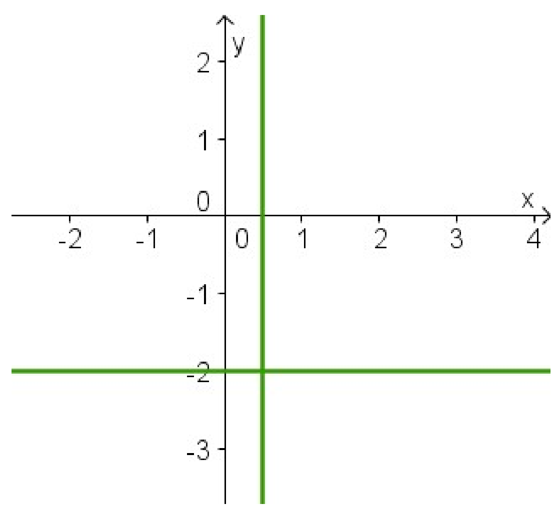
$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) + 10 = 9 + 1$;

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$;

Essa rappresenta il punto $P\ (3\ ;1)$ *(circonferenza degenere).*

Esercizio 549.39

Riconosci la conica degenere di equazione: $2xy + 4x - y - 2 = 0$



Soluzione

L'equazione data può essere riscritta nella seguente forma:

$2x \cdot (y + 2) - 1 \cdot (y + 2) = 0$; $\quad (y + 2) \cdot (2x - 1) = 0$.

Essa rappresenta una coppia di rette incidenti di equazioni:

$y + 2 = 0$ *e* $2x - 1 = 0$.

Pertanto la conica è una iperbole equilatera degenere coincidente con i propri asintoti.

Esercizio 551.48

Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione rappresenta una parabola con asse parallelo a uno degli assi cartesiani: $(k-4)x^2+(2-k)y^2-kx\quad(k+2)y+3=0$.

Soluzione

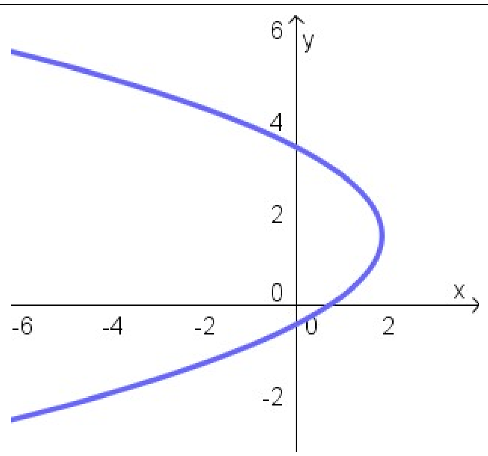
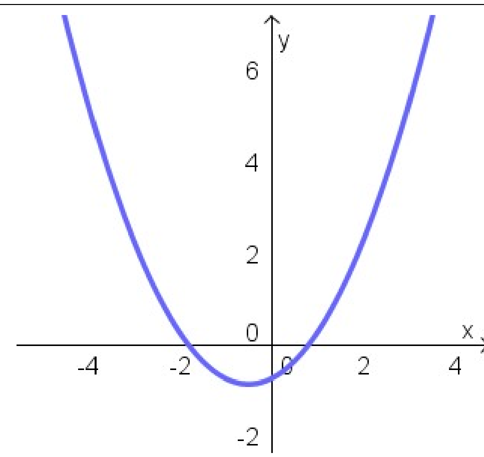
L'equazione data è l'equazione di una conica: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E+Fxy=0$.

In questo caso i coefficienti sono:

$A=k-4$ $\qquad B=2-k$ $\qquad C=-k$ $\qquad D=k+2$ $\qquad E=3$ $\qquad F=0$.

L'equazione data rappresenta una parabola con asse parallelo a uno degli assi cartesiani se contiene soltanto un termine di secondo grado (che non sia il termine rettangolare Fxy).

Pertanto si hanno i seguenti due casi:

I Caso	**II Caso**
$k-4=0$; *cioè* $k=4$	$2-k=0$; *cioè* $k=2$
Per $k=4$ *si ottiene:* $(4-4)x^2+(2-4)y^2-4x+(4+2)y+3=0$; $-2y^2-4x+6y+3=0$; $4x=-2y^2+6y+3$; $x=-\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}\qquad(asse\ \parallel\ asse\ x)$	*Per* $k=2$ *si ottiene:* $(2-4)x^2+(2-2)y^2-2x+(2+2)y+3=0$; $-2x^2-2x+4y+3=0$; $4y=2x^2+2x-3$; $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\qquad(asse\ \parallel\ asse\ y)$
	

Esercizio 551.50

Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione rappresenta un'iperbole e, in particolare, per quali valori è equilatera: $(4k-5)x^2+(2k+3)y^2-kx \quad (2k+1)y+5=0$.

Soluzione

L'equazione data è l'equazione di una conica: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E+Fxy=0$.

In questo caso i coefficienti sono:

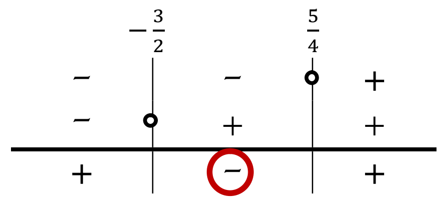
$A=4k-5 \qquad B=2k+3 \qquad C=-k \qquad D=2k+1 \qquad E=5 \qquad F=0$.

L'equazione data rappresenta un'iperbole se i coefficienti dei termini di secondo grado (che non sia il termine Fxy) sono discordi. Cioè $A \cdot B<0$.

Pertanto deve risultare che:

$(4k-5)\cdot(2k+3)<0$;

$$\left|\begin{array}{c} 4k-5>0 \\ 2k+3>0 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{c} k>\frac{5}{4} \\ k>-\frac{3}{2} \end{array}$$



L'equazione data rappresenta un'iperbole se $-\frac{3}{2}<k<\frac{5}{4}$.

In particolare l'iperbole è equilatera se $A=-B$.

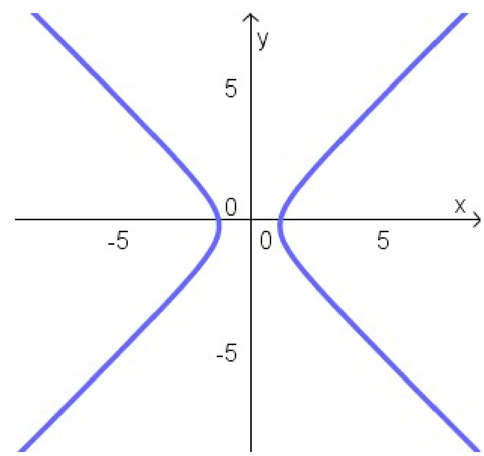
Cioè se $4k-5=-(2k+3)$; $\qquad 4k-5=-2k-3$; $\qquad 6k=2$; $\qquad k=\frac{1}{3}$.

Per $k=\frac{1}{3}$ *si ottiene:*

$\left(4\cdot\frac{1}{3}-5\right)x^2+\left(2\cdot\frac{1}{3}+3\right)y^2-\frac{1}{3}x+\left(2\cdot\frac{1}{3}+1\right)y+5=0$;

$-\frac{11}{3}x^2+\frac{11}{3}y^2-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}y+5=0$;

$11x^2-11y^2+x-5y-15=0$;



Esercizio 551.52

Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione rappresenta un'ellisse e, in particolare, per quali valori rappresenta una circonferenza: $(k+5)x^2 - ky^2 + x - y + 5 = 0$.

Soluzione

L'equazione data è l'equazione di una conica: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E + Fxy = 0$.

In questo caso i coefficienti sono:

$A = k+5 \qquad B = -k \qquad C = 1 \qquad D = -1 \qquad E = 5 \qquad F = 0$.

L'equazione data rappresenta un'ellisse se i coefficienti dei termini di secondo grado (che non sia il termine Fxy) sono concordi con la condizione di realtà $\delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E$.

I Caso – $A > 0 \quad \wedge \quad B > 0 \quad \wedge \quad \delta > 0$	**II Caso** – $A < 0 \quad \wedge \quad B < 0 \quad \wedge \quad \delta < 0$
$\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E > 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} k+5 > 0 \\ -k > 0 \\ \frac{1^2}{4(k+5)} + \frac{(-1)^2}{4(-k)} - 5 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k > -5 \\ k < 0 \\ \frac{1}{4(k+5)} - \frac{1}{4k} - 5 > 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} k > -5 \\ k < 0 \\ \frac{k - (k+5) - 20k \cdot (k+5)}{4k(k+5)} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k > -5 \\ k < 0 \\ \frac{k - k - 5 - 20k^2 - 100k}{4k(k+5)} > 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -5 < k < 0 \\ \frac{-20k^2 - 100k - 5}{4k(k+5)} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -5 < k < 0 \\ \frac{-(4k^2 + 20k + 1)}{4k(k+5)} > 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -5 < k < 0 \\ \frac{4k^2 + 20k + 1}{4k(k+5)} < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -5 < k < 0 \\ -5 < k < \frac{-5-2\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad \frac{-5+2\sqrt{6}}{2} < k < 0 \end{cases}$ *La soluzione è* $-5 < k < \frac{-5-2\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad \frac{-5+2\sqrt{6}}{2} < k < 0$	$\begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \\ \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E < 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} k+5 < 0 \\ -k < 0 \\ \frac{1^2}{4(k+5)} + \frac{(-1)^2}{4(-k)} - 5 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} k < -5 \\ k > 0 \\ \frac{1}{4(k+5)} - \frac{1}{4k} - 5 < 0 \end{cases}$ $\qquad \nexists\, k \in R$ *Perché* $k < -5 \quad \wedge \quad k > 0$ *non hanno alcuna soluzione comune*

L'equazione data rappresenta un'ellisse se $-5 < k < \frac{-5-2\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad \frac{-5+2\sqrt{6}}{2} < k < 0$.

Calcoli

$$\frac{4k^2 + 20k + 1}{4k(k+5)} < 0$$

$4k^2 + 20k + 1 > 0$	$k < \frac{-5-2\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad k > \frac{-5+2\sqrt{6}}{2}$
$4k > 0$	$k > 0$
$k + 5 > 0$	$k > -5$

	-5	$\frac{-5-2\sqrt{6}}{2}$	$\frac{-5+2\sqrt{6}}{2}$	0	
$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	
$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$$k_{1,2} = \frac{-10 \mp \sqrt{96}}{4} = \frac{-10 \mp 4\sqrt{6}}{4} = \frac{-5 \mp 2\sqrt{6}}{2} \cong \begin{matrix} k_1 = -4{,}95 \\ k_2 = -0{,}05 \end{matrix}$$

L'equazione data rappresenta una circonferenza se $A = B$ *, cioè se* $k + 5 = -k\,;\quad 2k = -5\,;\quad k = -\frac{5}{2}$

Tale valore però non è accettabile perché $-\frac{5}{2} \notin \left\{ k \in R \ / \ -5 < k < \frac{-5-2\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad \frac{-5+2\sqrt{6}}{2} < k < 0 \right\}$.

L'equazione data non rappresenta mai una circonferenza.

Determina per quali valori del parametro reale k l'equazione rappresenta un'ellisse e, in particolare, per quali valori rappresenta una circonferenza: $(3k-4)x^2+(k+2)y^2-3x+y+1=0$.

Soluzione

L'equazione data è l'equazione di una conica: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E+Fxy=0$.

In questo caso i coefficienti sono:

$A=3k-4 \qquad B=k+2 \qquad C=-3 \qquad D=+1 \qquad E=1 \qquad F=0$.

L'equazione data rappresenta un'ellisse se i coefficienti dei termini di secondo grado (che non sia il termine Fxy) sono concordi con la condizione di realtà $\delta=\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E$.

I Caso $-\ A>0 \ \wedge\ B>0 \ \wedge\ \delta>0$	**II Caso** $-\ A<0 \ \wedge\ B<0 \ \wedge\ \delta<0$
$\begin{cases} A>0 \\ B>0 \\ \frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E>0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 3k-4>0 \\ k+2>0 \\ \frac{(-3)^2}{4(3k-4)}+\frac{1^2}{4(k+2)}-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>\frac{4}{3} \\ k>-2 \\ \frac{9}{4(3k-4)}+\frac{1}{4(k+2)}-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>\frac{4}{3} \\ \frac{9k+18+3k-4-4(3k^2+6k-4k-8)}{4(3k-4)(k+2)}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>\frac{4}{3} \\ \frac{9k+18+3k-4-12k^2-24k+16k+32}{4(3k-4)(k+2)}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>\frac{4}{3} \\ \frac{-12k^2+4k+46}{4(3k-4)(k+2)}>0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} k>\frac{4}{3} \\ \frac{6k^2-2k-23}{2(3k-4)(k+2)}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>\frac{4}{3} \\ -2<k<\frac{1-\sqrt{139}}{6} \quad \vee \quad \frac{4}{3}<x<\frac{1+\sqrt{139}}{6} \end{cases}$ *La soluzione è* $\frac{4}{3}<k<\frac{1+\sqrt{139}}{6}$.	$\begin{cases} A<0 \\ B<0 \\ \frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E<0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 3k-4<0 \\ k+2<0 \\ \frac{(-3)^2}{4(3k-4)}+\frac{1^2}{4(k+2)}-1<0 \end{cases}$ $\begin{cases} k<\frac{4}{3} \\ k<-2 \\ \frac{9}{4(3k-4)}+\frac{1}{4(k+2)}-1<0 \end{cases}$ $\begin{cases} k<-2 \\ \frac{9k+18+3k-4-4(3k^2+6k-4k-8)}{4(3k-4)(k+2)}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} k<-2 \\ \frac{9k+18+3k-4-12k^2-24k+16k+32}{4(3k-4)(k+2)}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} k<-2 \\ \frac{-12k^2+4k+46}{4(3k-4)(k+2)}<0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} k<-2 \\ \frac{6k^2-2k-23}{2(3k-4)(k+2)}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k<-2 \\ k<-2 \quad \vee \quad \frac{1-\sqrt{139}}{6}<k<\frac{4}{3} \quad \vee \quad k>\frac{1+\sqrt{139}}{6} \end{cases}$ *La soluzione* $k<-2$.

L'equazione data rappresenta un'ellisse se $k<-2 \quad \vee \quad \frac{4}{3}<k<\frac{1+\sqrt{139}}{6}$.

$$\frac{6k^2-2k-23}{2(3k-4)(k+2)}<0$$

$6k^2-2k-23>0$	$k<\frac{1-\sqrt{139}}{6} \ \vee \ k>\frac{1+\sqrt{139}}{6}$
$3k-4>0$	$k>\frac{4}{3}$
$k+2>0$	$k>-2$

$k_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{139}}{6}\cong \begin{matrix} k_1=-1{,}8 \\ k_2=+2{,}1 \end{matrix}$

	-2		$\frac{1-\sqrt{139}}{6}$		$\frac{4}{3}$		$\frac{1+\sqrt{139}}{6}$	
+		+	○	−		−	○	+
−		−		−		+	✗	+
−	✗	+		+		+		+
+		−		+		−		+

L'equazione data rappresenta una circonferenza se $A=B$ *, cioè se* $3k-4=k+2$; $2k=6$; $k=3$

Tale valore però non è accettabile perché $3\notin\left\{k\in R \ / \ -5<k<\frac{-5-2\sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad \frac{-5+2\sqrt{6}}{2}<k<0\right\}$.

L'equazione data non rappresenta mai una circonferenza.

Esercizio 573.A1

Studia, al variare del parametro reale k il fascio di coniche $(k+3)x^2+2ky^2-2x+4y=0$
e indica per quali valori di k si ha un'iperbole, una parabola, un'ellisse o una circonferenza.

Soluzione

L'equazione data è l'equazione di una conica: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E+Fxy=0$.

In questo caso i coefficienti sono:

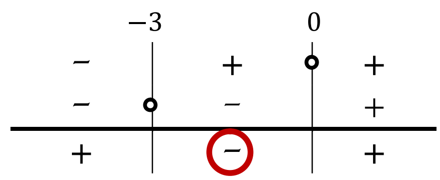
$A=k+3 \qquad B=2k \qquad C=-2 \qquad D=+4 \qquad E=0 \qquad F=0$.

L'equazione data rappresenta un'iperbole se i coefficienti dei termini di secondo grado (che non sia il termine Fxy) sono discordi. Cioè $A\cdot B<0$.

Pertanto deve risultare che:

$(k+3)\cdot 2k<0$;

$$\left|\begin{array}{c} k+3>0 \\ 2k>0 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{c} k>-3 \\ k>0 \end{array}$$



*L'equazione data rappresenta un'****iperbole*** *se* $\mathbf{-3}<k<0$.

In particolare ***l'iperbole è equilatera*** *se* $A=-B$, *cioè se* $k+3=-2k$; $\boldsymbol{k}=\mathbf{-1}$ *(accettabile)* .

Per $k=-1$ *si ottiene:*

$(-1+3)x^2+2(-1)y^2-2x+4y=0$; $\qquad 2x^2-2y^2-2x+4y=0$; $\qquad x^2-y^2-x+2y=0$;

L'equazione data rappresenta una ***parabola*** *con asse parallelo a uno degli assi cartesiani se uno dei due termini di secondo grado si annulla (che non sia il termine rettangolare Fxy). Si ricava* $\boldsymbol{k}=\mathbf{-3} \quad \vee \quad \boldsymbol{k}=\mathbf{0}$

Pertanto si hanno i seguenti due casi:

I Caso	**II Caso**
$k+3=0$; *cioè* $\boldsymbol{k}=\mathbf{-3}$	$2k=0$; *cioè* $\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$
Per $k=-3$ *si ottiene:* $(-3+3)x^2+2(-3)y^2-2x+4y=0$; $-6y^2-2x+4y=0$; $2x=-6y^2+4y$; $x=-3y^2+2y \qquad (asse \parallel asse\ x)$	*Per* $k=0$ *si ottiene:* $(0+3)x^2+2\cdot 0\cdot y^2-2x+4y=0$; $3x^2-2x+4y=0$; $4y=-3x^2+2x$; $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x \qquad (asse \parallel asse\ y)$

L'equazione $(k+3)x^2+2ky^2-2x+4y=0$ *rappresenta un'ellisse se i coefficienti dei termini di secondo grado (che non sia il termine Fxy) sono concordi con la condizione di realtà* $\delta=\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E$.

I Caso – $A>0 \quad \wedge \quad B>0 \quad \wedge \quad \delta>0$	**II Caso** – $A<0 \quad \wedge \quad B<0 \quad \wedge \quad \delta<0$
$\begin{cases} A>0 \\ B>0 \\ \frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k+3>0 \\ 2k>0 \\ \frac{(-2)^2}{4(k+3)}+\frac{4^2}{4\cdot 2k}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>-3 \\ k>0 \\ \frac{4}{4(k+3)}+\frac{16}{8k}>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k>0 \\ \frac{8k+16\cdot(k+3)}{8k\cdot(k+3)}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>0 \\ \frac{24k+48}{8k\cdot(k+3)}>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k>0 \\ \frac{3k+6}{k\cdot(k+3)}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} k>0 \\ -3<k<-2 \quad \vee \quad k>0 \end{cases}$ *La soluzione è* $k>0$.	$\begin{cases} A<0 \\ B<0 \\ \frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k+3<0 \\ 2k<0 \\ \frac{(-2)^2}{4(k+3)}+\frac{4^2}{4\cdot 2k}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} k<-3 \\ k<0 \\ \frac{4}{4(k+3)}+\frac{16}{8k}<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k<-3 \\ \frac{8k+16\cdot(k+3)}{8k\cdot(k+3)}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} k<-3 \\ \frac{24k+48}{8k\cdot(k+3)}<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k<-3 \\ \frac{3k+6}{k\cdot(k+3)}<0 \end{cases}$ $\begin{cases} k<-3 \\ k<-3 \quad \vee \quad -2<k<0 \end{cases}$ *La soluzione* $k<-3$.

L'equazione data rappresenta un' ***ellisse*** *se* $\boldsymbol{k}<-3 \qquad \vee \qquad \boldsymbol{k}>0$.

$$\frac{3k+6}{k\cdot(k+3)}>0$$

$3k+6>0$	$k>-2$
$k>0$	$k>0$
$k+3>0$	$k>-3$

	-3		-2		0	
$-$		$-$	0	$+$		$+$
$-$		$-$		$-$	$\times$	$+$
$-$	$\times$	$+$		$+$		$+$
$-$		$+$		$-$		$+$

L'equazione data rappresenta una ***circonferenza*** *se* $A=B$, *cioè se* $k+3=2k$; $\boldsymbol{k=3}$

Tale valore è accettabile perché $3 \notin \{k \in R \;\; / \;\; k<-3 \quad \vee \quad x>0\}$.

Riassumendo

Parametro	*Tipo di conica*
$-3<k<0$	*Iperbole*
$k=-1$	*Iperbole equilatera*
$k=-3 \quad \vee \quad k=0$	*Parabola*
$k<-3 \quad \vee \quad k>0$	*Ellisse*
$k=3$	*Circonferenza*

Esercizio 573.A6

Determina il luogo dei punti $P\left(t+3\,;\,\sqrt{1-t^2}\right)$ del piano le cui coordinate sono espresse in funzione di $t \in R$.

Disegna poi il grafico.

<u>*Soluzione*</u>

Le equazioni parametriche del luogo dei punti del piano sono: $\begin{cases} x = t+3 \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

La seconda delle quali esiste per $-1 \le t \le 1$.

Da questa relazione si ricavano le Condizione di Esistenza delle incognite x *e* y .

$\begin{cases} x = t+3 \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} t = x-3 \\ 0 \le \sqrt{1-t^2} \le 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \le x-3 \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

Per trovare l'equazione del luogo richiesto risolviamo il sistema ricavando il parametro t :

$\begin{cases} t = x-3 \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ y = \sqrt{1-(x-3)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ y = \sqrt{1-x^2-9+6x} \end{cases} \quad \begin{cases} --- \\ y = \sqrt{-x^2-8+6x} \end{cases}$

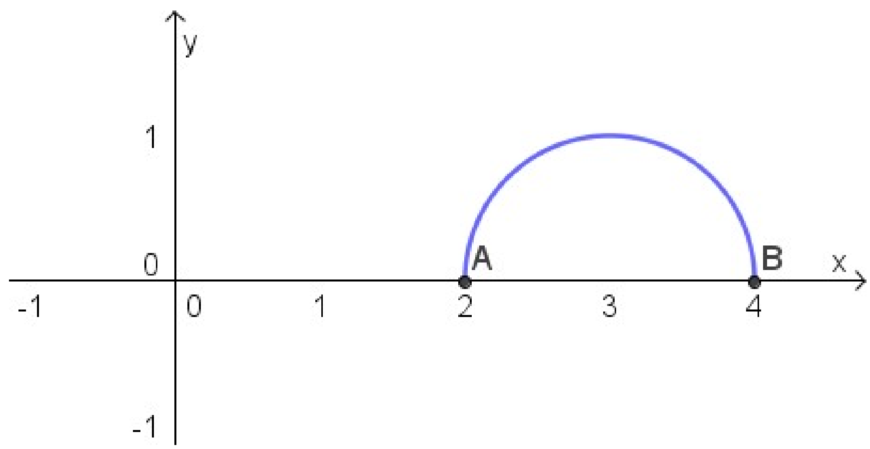
Elevando al quadrato si ottiene:

$y^2 = -x^2-8+6x\,;\qquad x^2+y^2-6x+8=0\,;$

Essa rappresenta l'equazione di una circonferenza di centro $C(3\,;0)$ *e raggio* $r=1$.

Ma considerando le C. E. delle incognite x *e* y *, tracciamo soltanto l'arco di circonferenza tale che:*

$\begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$



Esercizio P624.84

Determina l'equazione cartesiana del luogo dei punti del piano descritto dai vertici delle parabole del fascio: $y = x^2 - 2(a+1)x - a - 3$.

<u>*Soluzione*</u>

Le coordinate del vertice del fascio di parabole sono: $V\ (a+1\ ;\ -a^2-3a-4)$.

Quindi le equazioni parametriche del luogo richiesto sono: $\begin{cases} x = a+1 \\ y = -a^2-3a-4 \end{cases}$

Ricavando il parametro a dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene:

$a = x - 1 \qquad \longrightarrow \qquad y = -(x-1)^2 - 3(x-1) - 4$;

$y = -x^2 - 1 + 2x - 3x + 3 - 4$; $\qquad y = -x^2 - x - 2$.

Esercizio P625.110

Sia P un punto dell'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$ e sia A il punto di intersezione dell'ellisse con il semiasse negativo delle x. Determiniamo il luogo descritto dal punto medio di AP, al variare di P sull'ellisse.

<u>*Soluzione*</u>

Per evitare l'utilizzo di radicali, utilizziamo due parametri per esprimere le coordinate del generico punto P dell'ellisse.

Sia pertanto, $P\ (a\ ;\ b)$*, con a e b tali che* $a^2 + 4b^2 = 4$.

Determiniamo le coordinate del punto A:

$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 4 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A\ (-2\ ;\ 0) \\ \\ B\ (2\ ;0) \end{matrix}$

Le coordinate del punto medio M del segmento AP sono: $M\ \left(\frac{a-2}{2}\ ;\ \frac{b+0}{2}\right)$

Il luogo richiesto ha equazioni parametriche: $\begin{cases} x = \frac{a-2}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$ *al variare di a e b tali che* $a^2 + 4b^2 = 4$.

Risolviamo tale sistema ricavando a e b: $\begin{cases} a = 2x + 2 \\ b = 2y \end{cases}$

Sostituiamo le espressioni ottenute nella relazione: $a^2 + 4b^2 = 4$.

Otteniamo l'equazione cartesiano del luogo richiesto:

$(2x+2)^2 + 4(2y)^2 = 4$; $\qquad 4x^2 + 4 + 8x + 16y^2 = 4$;

$4x^2 + 16y^2 + 8x = 0$; $\qquad 4(x^2 + 2x) + 16y^2 = 0$;

$4(x^2 + 2x + 1) + 16y^2 = 4$; $\qquad (x+1)^2 + 16y^2 = 4$;

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \ .$$

Si tratta di una ellisse traslata avente il centro di simmetria in $C\ (-1\ ;0)$.

Esercizio 513.378

Dopo aver studiato il fascio di curve di equazione $y = \frac{ax+1}{(a-2)x+3}$ ***trova il luogo geometrico dei centri di simmetria.***

Soluzione

$$y = \frac{ax+1}{(a-2)x+3}$$

L'equazione rappresenta una funzione omografica del tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ *se* $[\ c \neq 0 \quad \wedge \quad ad - bc \quad 0\ ]$

Se $c = 0$ *cioè se* $a = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2x+1}{(2-2)x+3}\ ; \quad y = \frac{2x+1}{3}\ ; \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Se $ad - bc \quad 0$ *cioè se* $a \cdot 3 - 1 \cdot (a-2) = 0\ ;\ a = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{-x+1}{-3x+3}\ ; \quad y = \frac{-x+1}{3(-x+1)}\ ; \quad y = \frac{1}{3} \ \wedge\ x \neq 1$

Se $a \neq 2 \quad \wedge \quad a \neq -1 \quad \Longrightarrow$ *fascio di funzioni omografiche avente centro di simmetria* $C\left(-\frac{d}{c};\ \frac{a}{c}\right) \equiv \left(\frac{3}{2-a};\ \frac{a}{a-2}\right)$.

Determiniamo i punti base:

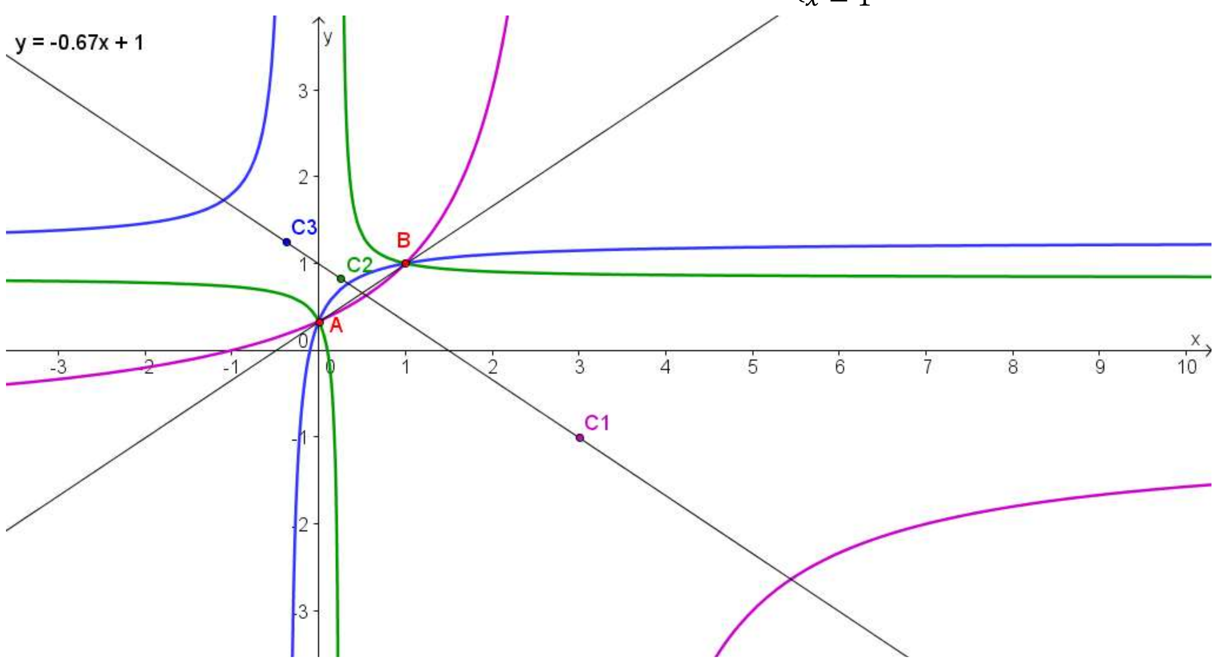
$y = \frac{ax+1}{(a-2)x+3}\ ;$ $\quad [(a-2)x+3]y = ax+1\ ;$ $\quad (ax-2x+3)y = ax+1\ ;$

$axy - 2xy + 3y - ax - 1 = 0\ ;$ $\quad axy - ax - 2xy + 3y - 1 = 0\ ;$ $\quad a(xy - x) - 2xy \quad 3y - 1 = 0\ ;$

$$\begin{cases} xy - x = 0 \\ -2xy + 3y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \cdot (y-1) = 0 \\ -2xy + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad A\left(0\ ;\ \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ -2x + 3 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad B\ (1\ ;\ 1)$$



Riassumendo

Parametro	Equazione	Tipo di conica
$a = 2$	$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$	*Retta*
$a = -1$	$y = \frac{1}{3} \ \wedge\ x \neq 1$	*Retta privata del punto* $P\left(1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$
$a \neq 2 \quad \wedge \quad a \neq -1$	$y = \frac{ax+1}{(a-2)x+3}$	*Fascio di funzioni omografiche* *centro di simmetria in* $C\left(\frac{3}{2-a};\ \frac{a}{a-2}\right)$ *Punti Base* $A\left(0\ ;\ \frac{1}{3}\right)$ *e* $B\ (1\ ;\ 1)$

Determiniamo il luogo geometrico dei centri di simmetria.

Essendo $C\left(\frac{3}{2-a};\frac{a}{a-2}\right)$ *le equazioni parametriche del centro di simmetria sono:* $\begin{cases} x=\frac{3}{2-a} \\ y=\frac{a}{a-2} \end{cases}$

Ricavando il parametro a dalla prima equazione

$(2-a)x=3\ ;\qquad 2x-ax=3\ ;\qquad -ax=3-2x\ ;\qquad a=\dfrac{2x-3}{x}\ ;$

e sostituendolo nella seconda equazione si ottiene:

$$y=\dfrac{\dfrac{2x-3}{x}}{\dfrac{2x-3}{x}-2}\ ;\qquad y=\dfrac{\dfrac{2x-3}{x}}{\dfrac{2x-3-2x}{x}}\ ;\qquad y=\dfrac{\dfrac{2x-3}{x}}{\dfrac{-3}{x}}\ ;\qquad y=\dfrac{2x-3}{x}\cdot\dfrac{x}{-3}\ ;\quad y=-\dfrac{2}{3}x+1\,.$$