ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

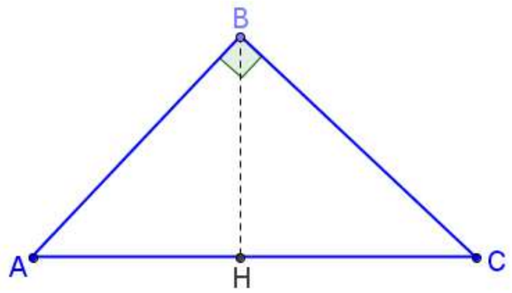
Anno scolastico 2023/2024

MATEMATICA

Quesiti

Quesito 1 – Soluzione 1

E' dato un triangolo ABC, rettangolo in B. Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà dell'ipotenusa.



Dimostrazione

Occorre dimostrare una doppia implicazione.

IPOTESI		TESI
ABC è un triangolo isoscele sulla base AC ; $A\hat{B}C \cong 90°$.	$\Rightarrow$	*L'altezza* $BH \cong \frac{1}{2}\mathrm{AC}$

Dimostrazione

I triangoli ABH e BCH sono congruenti per il 1° Criterio di congruenza dei triangoli.
Infatti:

$AB \cong BC$	*perchè* ABC *è un triangolo isoscele sulla base AC;*
BH	*è in comune ai due triangoli;*
$A\hat{B}H \cong C\hat{B}H$	*perché* $A\hat{B}H \cong 90° - B\hat{A}H \cong 90° - B\hat{C}H \cong C\hat{B}H$; *oppure* *perché angoli complementari dei due angoli alla base congruenti* $\hat{A}$ *e* $\hat{C}$

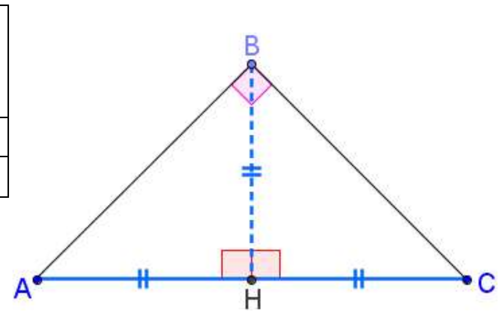
Avendo dimostrato che i triangoli ABH e BCH sono congruenti, essi hanno i lati corrispondenti congruenti. In particolare $AH \cong \mathrm{HC}$.
Ma se $AH \cong \mathrm{HC}$ *, allora BH è la mediana relativa all'ipotenusa e risulta essere, per il "Teorema della mediana",* $BH \cong \frac{1}{2}\mathrm{AC}$.

IPOTESI		TESI
ABC è un triangolo rettangolo in B; *L'altezza* $BH \cong \frac{1}{2}\mathrm{AC}$.	$\Rightarrow$	*ABC è un triangolo isoscele sulla base AC*

Dimostrazione

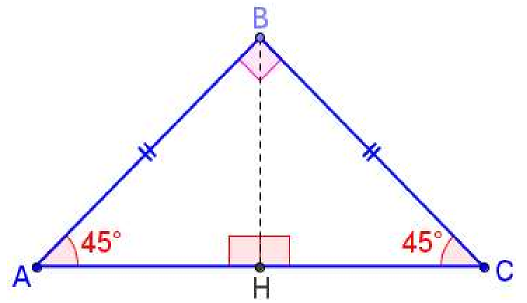
I triangoli ABH e BCH sono congruenti per il 1° Criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:

$AH \cong HC$	*per il "Teorema della mediana" la mediana relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa, quindi l'altezza BH è anche mediana;*
BH	*è in comune ai due triangoli;*
$A\hat{H}B \cong B\hat{H}C \cong 90°$	*perché BH è l'altezza del triangolo ABC.*



Avendo dimostrato che i triangoli ABH e BCH sono congruenti, essi hanno i lati corrispondenti congruenti.
In particolare $AB \cong \mathrm{BC}$ *, cioè la tesi.*

Quesito 1 – Soluzione 2



E' dato un triangolo ABC, rettangolo in B. Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà dell'ipotenusa.

Dimostrazione

Occorre dimostrare una doppia implicazione.

IPOTESI		*TESI*
ABC è un triangolo isoscele sulla base AC ; $A\hat{B}C \cong 90°$.	$\Rightarrow$	*L'altezza* $BH \cong \frac{1}{2}\mathrm{AC}$

Dimostrazione

I triangoli ABH e BCH sono congruenti per il 1° Criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:

$AB \cong BC$	*perchè* ABC *è un triangolo isoscele sulla base AC;*
BH	*è in comune ai due triangoli;*
$A\hat{B}H \cong C\hat{B}H$	*perché* $A\hat{B}H \cong 180° - A\hat{H}B - B\hat{A}H \cong 180 - 90° - 45° \cong 45°$ $C\hat{B}H \cong 180° - B\hat{H}C - B\hat{C}H \cong 180 - 90° - 45° \cong 45°$

Avendo dimostrato che i triangoli ABH e BCH sono congruenti, essi hanno i lati corrispondenti congruenti. In particolare $AH \cong \mathrm{HC}$.

Essendo inoltre il triangolo ABH isoscele sulla base AB, $BH \cong AH$.

Ma se $BH \cong AH \cong \mathrm{HC}$ *, allora* $BH \cong \frac{1}{2}\mathrm{AC}$.

IPOTESI		*TESI*
ABC è un triangolo rettangolo in B; *L'altezza* $BH \cong \frac{1}{2}\mathrm{AC}$.	$\Rightarrow$	*ABC è un triangolo isoscele sulla base AC*

Dimostrazione

Essendo il triangolo ABC rettangolo in B, è inscrittibile nella semicirconferenza di diametro AC.

Essendo BH congruente alla metà del diametro AC, si ha che BH è un raggio della semicirconferenza.

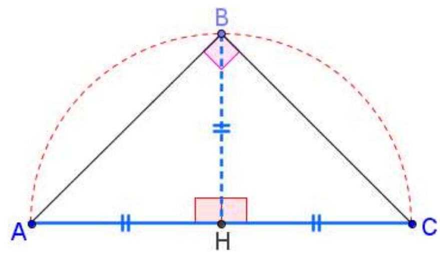
Ma se BH è un raggio della semicirconferenza, anche AH e HC sono raggi della stessa semicirconferenza.

I triangoli ABH e BCH sono congruenti per il 1° Criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:

$AH \cong HC$	*perché raggi della stessa semicirconferenza*
BH	*è in comune ai due triangoli;*
$A\hat{H}B \cong B\hat{H}C \cong 90°$	*perché BH è l'altezza del triangolo ABC.*

Avendo dimostrato che i triangoli ABH e BCH sono congruenti, essi hanno i lati corrispondenti congruenti.

In particolare $AB \cong \mathrm{BC}$ *, cioè la tesi.*



Quesito 2

Si lancia 5 volte una moneta truccata che da testa con probabilità p.

- **Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte?**
- **Per quale valore di p la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima?**

Soluzione a

Se la moneta non fosse truccata:

i casi possibili sono: 2^5

i casi favorevoli sono 10, e cioè:

TTCCC	*TCTCC*	*TCCTC*	*TCCCT*
CTTCC	*CTCTC*	*CTCCT*	
CCTTC	*CCTCT*		
CCCTT			

Su 5 lanci, la probabilità di ottenere 2 teste è : $p\,(5\,,2) \;=\; \frac{10}{2^5} \;=\; \frac{10}{32} \;=\; \frac{5}{16}$.

Ma la moneta è truccata quindi occorre utilizzare il "Teorema delle Prove ripetute" di eventi indipendenti:

$$p\,(n\,,k) \;=\; \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$con\ p\ = probabilità\ di\ successo\ ;\quad n = numero\ delle\ prove\ ripetute\quad e\quad k = numero\ dei\ successi$

$$p\,(5\,,2) \;=\; \binom{5}{2} \cdot (p)^2 \cdot (1-p)^3 \;=\; \frac{5\cdot 4}{2!} \cdot p^2 \cdot (1-p)^3 \;=\; 10\,p^2(1-p)^3\,.$$

Soluzione b

Studiamo la funzione: $f(p) = 10\,p^2(1-p)^3 \qquad con \quad 0 \le p \le 1$.

Agli estremi la funzione è nulla:

$f(0) = 10 \cdot\ 0^2(1-0)^3 = 0\,; \qquad f(1) = 10 \cdot\ 1^2(1-1)^3 = 0\,;$

$y' = 20p \cdot (1-p)^3 + 10\,p^2 \cdot 3(1-p)^2 \cdot (-1)\,.$

$y' = 20p \cdot (1-p)^3 - 30\,p^2(1-p)^2\,.$

$y' = 10p \cdot (1-p)^2[2(1-p) - 3p]\,.$

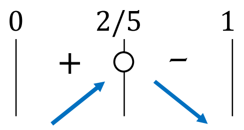
$y' = 10p \cdot (1-p)^2[2-5p]\,.$

$y' = 0\,; \qquad 10p \cdot (1-p)^2 \cdot (2-5p) = 0\,; \qquad p = 0 \quad \vee \quad p = 1 \quad \vee \quad p = \frac{2}{5}\,.$

$y' > 0\,; \qquad 10p \cdot (1-p)^2 \cdot (2-5p) > 0\,;$

Essendo la probabilità $p \ge 0$ *e* $(1-p)^2 \ge 0 \quad \forall p \in R$ *la disequazione si riduce a:*

$2 - 5p > 0 \quad \Big| \qquad p < \frac{2}{5}$



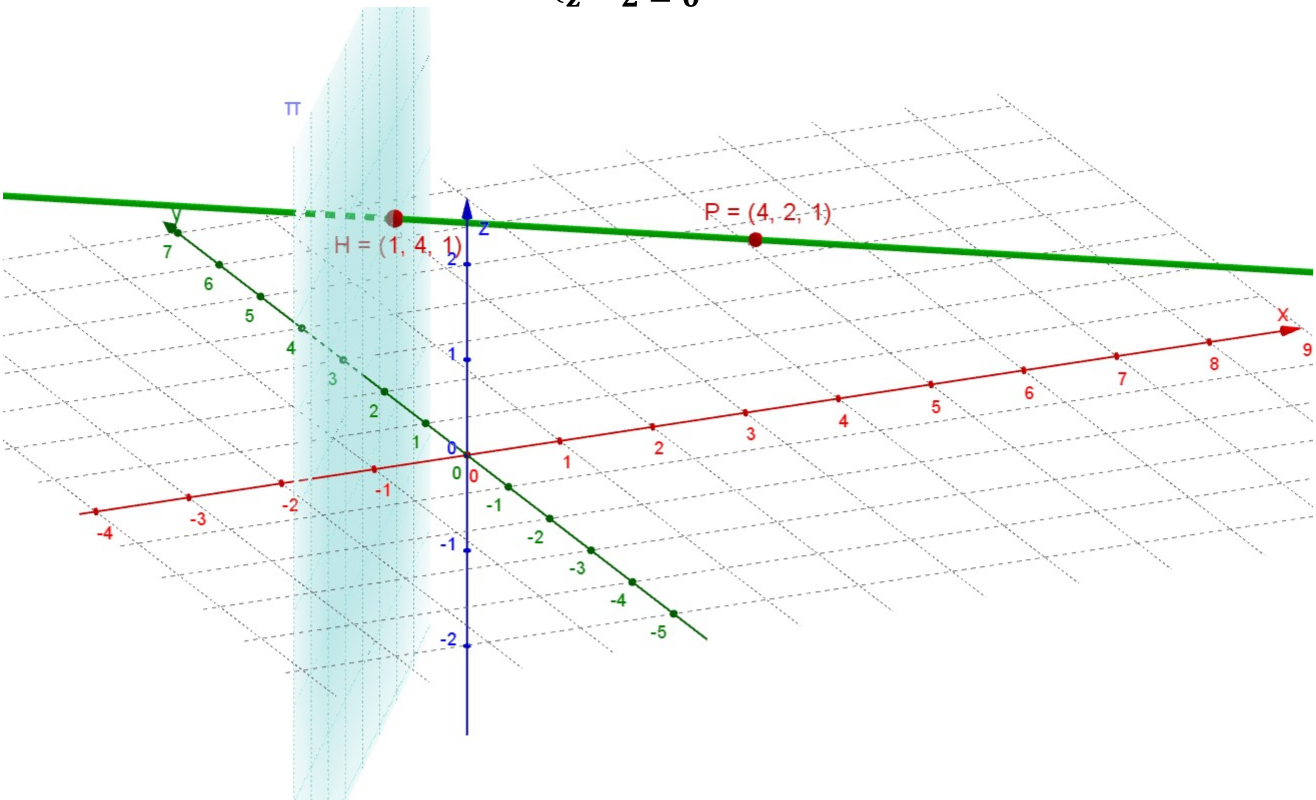
$$\boldsymbol{f\left(\frac{2}{5}\right) = 10\,\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(1-\frac{2}{5}\right)^3 = 10\cdot\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3 = 10\cdot\frac{4}{25}\cdot\frac{27}{125} = \frac{1080}{3125} = 0,3456}\,.$$

Pertanto la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima per $\boldsymbol{p = \frac{2}{5}}$.

Quesito 3

Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale Oxyz, è dato il piano $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{3x-2y+5=0}$.

- **Determinare le coordinate del punto H, proiezione ortogonale di $\boldsymbol{P(4\,;2;1)}$ sul piano $\boldsymbol{\pi}$.**
- **Determinare l'intersezione della retta s : $\begin{cases} \boldsymbol{x-y+1=0} \\ \boldsymbol{z-2=0} \end{cases}$ con il piano $\boldsymbol{\pi}$.**



<u>*Soluzione a*</u>

Il fascio di rette passante per il punto $P(4;2;1)$ *ha equazione:* $\begin{cases} x=4+k\,l \\ y=2+k\,m \\ z=1+k\,n \end{cases}$

Una retta del fascio è perpendicolare al piano π se il vettore direzione della retta $\vec{v}\,(l,m,n)$ *è parallelo al vettore normale del piano π* $\vec{n}\,(a,b,c)$ *che nel nostro caso è:* $\vec{n}\,(3,-2,0)$.

Ciò si verifica se e solo se $\exists\, k \in R$ *tale che:* $l=ka$; $m=kb$; $n=kc$.

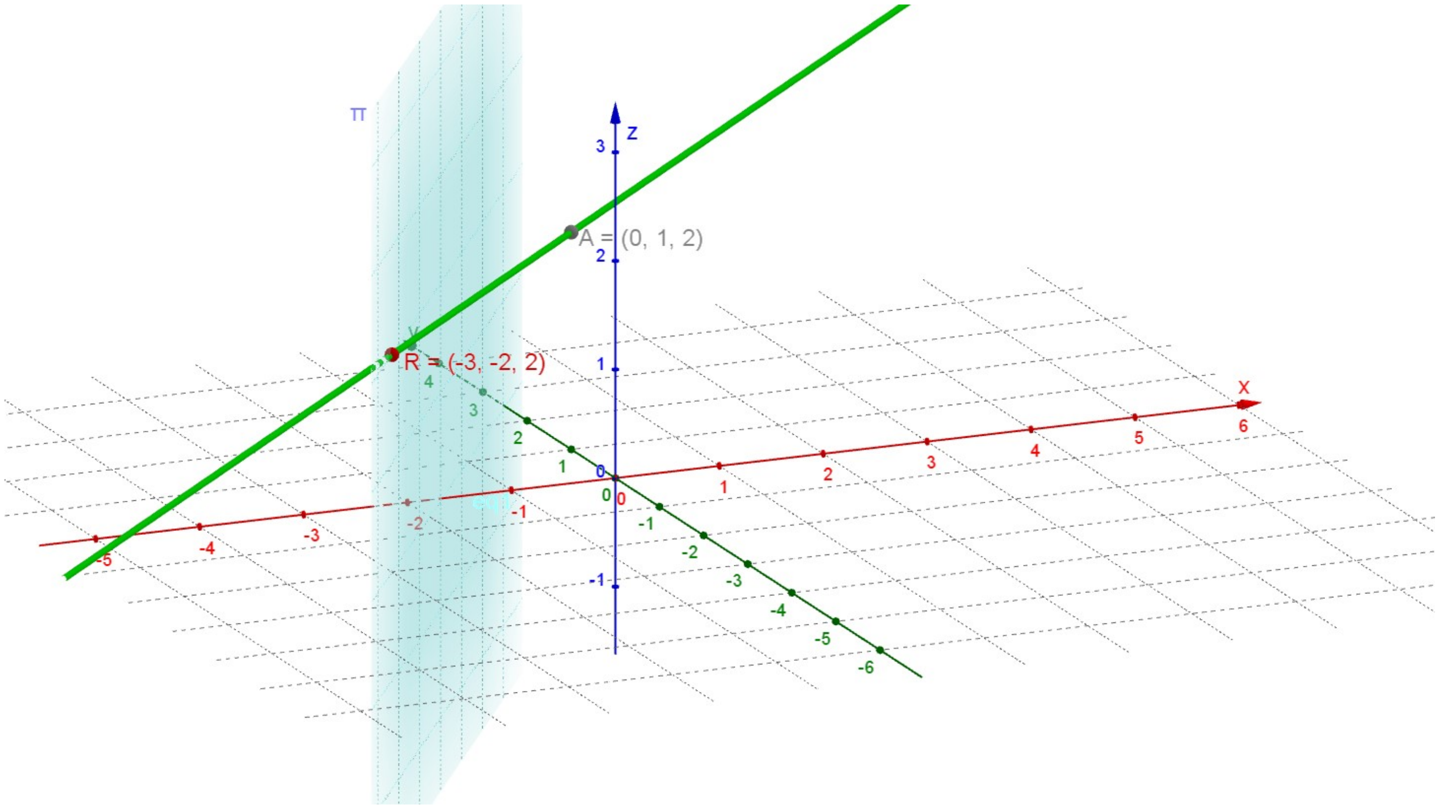
Pertanto la retta passante per P è perpendicolare al piano π ha equazione: $\begin{cases} x=4+3k \\ y=2-2k \\ z=1 \end{cases}$

Risolviamo il sistema fra le equazioni di tale retta e il piano π e determiniamo le coordinate del punto H, proiezione ortogonale del punto P sul piano π :

$$\begin{cases} x=4+3k \\ y=2-2k \\ z=1 \\ 3x-2y+5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 3(4+3k)-2(2-2k)+5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 12+9k-4+4k+5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ - \\ 13k=-13 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ - \\ k=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4+3(-1)=1 \\ y=2-2(-1)=4 \\ z=1 \\ - \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad H(1\,;4\,;1)\,.$$

<u>*Soluzione b*</u>



Determiniamo le coordinate del punto di intersezione fra la retta s e il piano π :

La retta s di equazione: $\begin{cases} x-y+1=0 \\ z-2=0 \end{cases}$ *ponendo* $x=k$ *, ha equazioni parametriche:* $\begin{cases} x=k \\ y=1+k \\ z=2 \end{cases}$

Risolviamo il sistema fra le equazioni di tale retta e il piano π *e determiniamo le coordinate del punto:*

$$\begin{cases} x=k \\ y=1+k \\ z=2 \\ 3x-2y+5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 3(k)-2(1+k)+5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 3k-2-2k+5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ - \\ k=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3 \\ y=1-3=-2 \\ z=2 \\ - \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad R\,(-3\,;-2\,;2)\,.$$

Quesito 4

Dimostrare che l'equazione $x^3 + x - \cos x = 0$ ammette un'unica soluzione positiva.

Soluzione 1

Poniamo $y = \cos x$ *, si ottiene:* $\begin{cases} y = \cos x \\ y = x^3 + x \end{cases}$

Tracciamo i grafici approssimativi delle due funzioni continue e derivabili in tutto R .

La funzione $y = \cos x$ *è una funzione periodica di periodo* 2π *il cui grafico è noto.*

La funzione $y = x^3 + x$ *è una cubica strettamente crescente* $\forall x \in R$ *che interseca l'asse x soltanto nell'origine.*

Infatti:

$x^3 + x = 0\,;\quad x \cdot (x^2 + 1) = 0\,;\quad \begin{matrix} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \quad \nexists x \in R \end{matrix}$

$x^3 + x > 0\,;\quad x \cdot (x^2 + 1) = 0\,;$ *Essendo* $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in R$ *si ha:* $x > 0$.

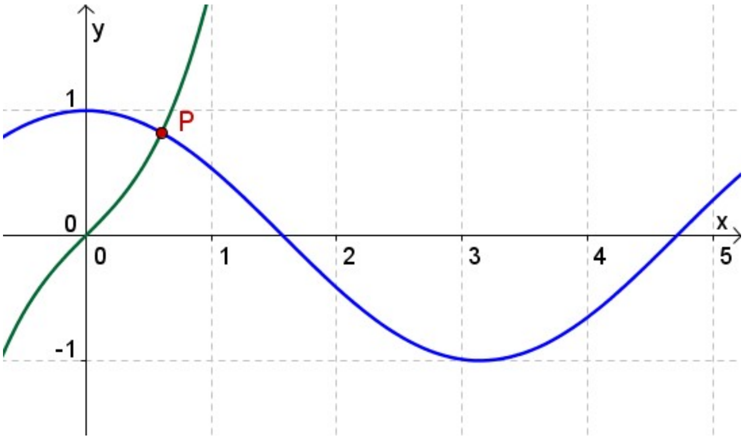
$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 + x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

$y' = 3x^2 + 1\,;$

$y' = 0\,;\qquad 3x^2 + 1 = 0\,;\qquad \nexists x \in R$

$y' > 0\,;\qquad 3x^2 + 1 > 0\,;\qquad \forall x \in R$



Dall'esame dei due grafici si ricava che hanno un'unica intersezione nel punto P di ascissa positiva.

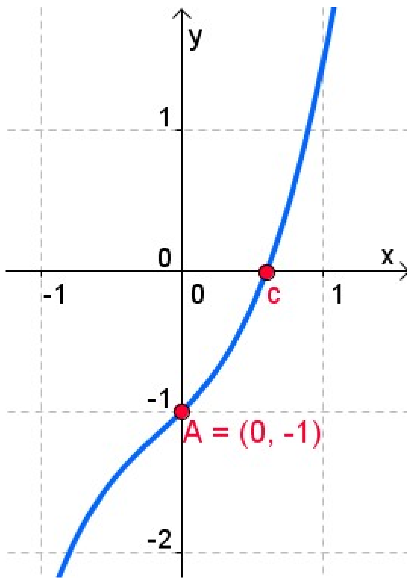
Pertanto l'equazione $x^3 + x - cos\, x = 0$ *ammette un'unica soluzione positiva.*

Soluzione 2

La funzione $f\ (x) = x^3 + x - \cos x$ *è continua in tutto R (perché somma di funzioni continue).*

$lim_{x\to+\infty}(x^3 + x - \cos x) \ = \ lim_{x\to+\infty}\, x^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^3}\right) \ = \ +\infty\ .$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 + x - \cos x) \ = \ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x^3}\right) \ = \ -\infty\ .$



Inoltre la funzione $f\ (x) = x^3 + x - \cos x$ *è strettamente crescente* $\forall x \in R$.

Infatti:

$f'\ (x) = 3x^2 + 1 + sin\, x$

Essendo $|sin\, x| \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad 3x^2 + 1 + sin\, x > 0 \qquad \forall x \in R\ .$

Pertanto, per il teorema degli zeri,
esiste almeno un punto $c \in R$ *tale che* $f(c) = 0$.

Essendo la funzione strettamente crescente in R tale punto è unico.

Risulta poi: $f\ (0) = 0^3 + 0 - \cos 0 \ = \ -1 \qquad \Rightarrow \qquad A\ (0; -1)\ .$

Esaminando infine il grafico qualitativo si deduce che tale valore $x = c$ *deve essere positivo..*

Quesito 5

Determinare la funzione polinomiale di quarto grado $y = p(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:

- **è tangente all'asse x nell'origine ;**
- **passa per il punto $(1\,;0)$;**
- **ha un punto stazionario in $(2\,;-2)$.**

<u>*Soluzione*</u>

La funzione polinomiale di quarto grado richiesta è del tipo: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Essendo la funzione tangente all'asse x nell'origine equivale a dire che:

- *passa per l'origine, cioè* $e = 0$;
- $y'(0) = 0$; $\quad y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$; $\quad 4a \cdot 0^3 + 3b \cdot 0^2 + 2c \cdot 0 + d = 0$; $\quad d = 0$.

L'equazione si riduce a : $y = ax^4 + bx^3 + cx^2$

Dal passaggio per il punto $(1\,;0)$ *si ricava:* $0 = a + b + c$

Dal passaggio per il punto $(2\,;-2)$ *si ricava:* $-2 = 16a + 8b + 4c$

$y'(2) = 0$; $\quad y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$; $\quad 4a \cdot 2^3 + 3b \cdot 2^2 + 2c \cdot 2 = 0$;

$32a + 12b + 4c = 0$; $\quad 8a + 3b + c = 0$.

Risolvendo il sistema fra queste tre ultime equazioni si ha:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a + 8b + 4c = -2 \\ 8a + 3b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -a - b \\ 8a + 4b + 2c = -1 \\ 8a + 3b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 8a + 4b + 2(-a - b) = -1 \\ 8a + 3b + (-a - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 6a + 2b = -1 \\ 7a + 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ b = -\dfrac{7}{2}a \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 6a + 2\left(-\dfrac{7}{2}a\right) = -1 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 6a - 7a = -1 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ a = 1 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ - \\ b = -\dfrac{7}{2} \cdot 1 = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - \left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{5}{2} \\ - \\ - \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y = x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \quad .$$

Quesito 6

Si consideri la funzione integrale $F(x)=\int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,dt$, con $x \geq a$, in cui a indica un parametro reale positivo. Determinare il più grande valore di a in modo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}$.

<u>Soluzione</u>

Ricordando che: $\int f'(x)\cdot\cos f(x)\ dt\ = sin\ f(x)+c$

Otteniamo:

$$\int \frac{cos\ \left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\ dt\ =\ -\int -\frac{1}{t^2}\cdot cos\ \left(\frac{1}{t}\right)\ dt = -\ sin\ \left(\frac{1}{t}\right)+c$$

$$F(x)=\int_a^x \frac{cos\ \left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\ dt\ =\ \left[-sin\ \left(\frac{1}{t}\right)\right]_a^x\ =\ -sin\ \left(\frac{1}{x}\right)+sin\ \left(\frac{1}{a}\right).$$

Imponendo che: $F\left(\frac{2}{\pi}\right)=-\frac{1}{2}$ *Si ricava:*

$$-sin\ \left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\right)+sin\ \left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{2}\ ;$$

$$-sin\ \left(\frac{\pi}{2}\right)+sin\ \left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{2}\ ;$$

$$-1+sin\ \left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{2}\ ;$$

$$sin\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{2}\ ;$$

$$\frac{1}{a}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad \vee \qquad \frac{1}{a}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad \forall k\in Z\ .\quad (*)$$

$$\frac{1}{a}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad \vee \qquad \frac{1}{a}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi$$

$$a=\frac{1}{\frac{\pi}{6}+2k\pi} \qquad \vee \qquad a=\frac{1}{\frac{5}{6}\pi+2k\pi}$$

$$a=\frac{1}{\frac{\pi+12k\pi}{6}} \qquad \vee \qquad a=\frac{1}{\frac{5\pi+12k\pi}{6}}$$

$$a=\frac{6}{\pi(1+12k)} \qquad \vee \qquad a=\frac{6}{\pi(5+12k)}$$

Essendo a *un parametro reale positivo,* k *deve essere un numero Naturale e non Intero relativo (*) .*

Quindi il più grande valore di a *si ottiene per* $k=0$.

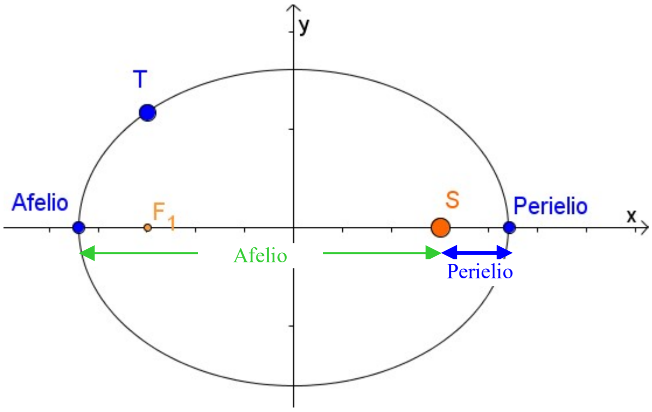
Si ottengono quindi le due soluzioni:

$$a=\frac{6}{\pi} \qquad \vee \qquad a=\frac{6}{5\pi}$$

Fra queste, il valore maggiore è: $a=\frac{6}{\pi}$.

Quesito 7

Il prossimo 5 luglio la terra raggiungerà l'afelio, il punto della propria orbita in cui è massima la distanza dal sole, pari a $1,52 \cdot 10^{11}\ m$. Il perielio è invece il punto che si trova alla minima distanza dal sole, pari a $1,47 \cdot 10^{11}\ m$. Determinare, in un opportuno sistema di riferimento, l'equazione che rappresenta la traiettoria della terra intorno al sole.



Soluzione

L'orbita della terra intorno al sole può essere considerata, con una buona approssimazione, come un'ellisse in cui il sole occupa uno dei due fuochi.

Considerando, per semplificare i calcoli, l'ellisse a centro con i fuochi appartenenti all'asse x, l'equazione è:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a = semiasse\ maggiore$ e $b = semiasse\ minore$.

Il semiasse maggiore	$a = \frac{d_{Afelio} + d_{Perelio}}{2} = \frac{1,52 \cdot 10^{11} + 1,47 \cdot 10^{11}}{2} = \frac{2,99 \cdot 10^{11}}{2} = 1,495 \cdot 10^{11}$
	$a^2 = (1,495 \cdot 10^{11})^2 = 2,235025 \cdot 10^{22}$
La distanza focale	$2c = d_{Afelio} - d_{Perelio} = 1,52 \cdot 10^{11} - 1,47 \cdot 10^{11} = 0,05 \cdot 10^{11}$
	$c = \frac{d_{Afelio} - d_{Perelio}}{2} = \frac{0,05 \cdot 10^{11}}{2} = 0,025 \cdot 10^{11}$
Il semiasse minore	$b^2 = a^2 - c^2 = (1,495 \cdot 10^{11})^2 - (0,025 \cdot 10^{11})^2 =$ $= 2,235025 \cdot 10^{22} - 0,000625 \cdot 10^{22} = 2,2344 \cdot 10^{22}$

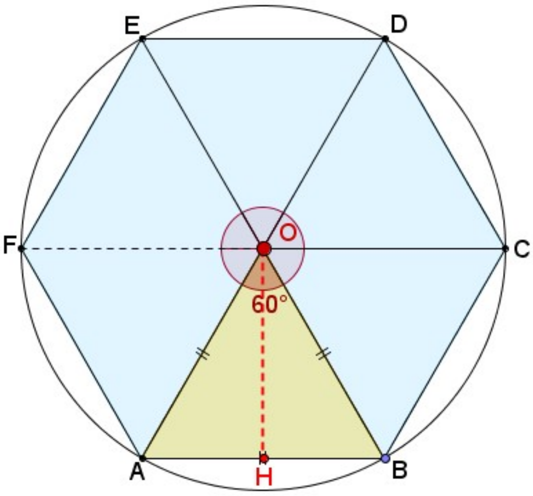
L'equazione che rappresenta la traiettoria della terra intorno al sole è:

$$\frac{x^2}{2,235025 \cdot 10^{22}} + \frac{y^2}{2,2344 \cdot 10^{22}} = 1 .$$

Quesito 8

Scrive Carlo Emilio Gadda in uno dei racconti de *L'Adalgisa – Disegni milanesi*:

"Le stanze del servizio, il bagno, i corridoi, l'anticamera e l'uno de' due gabinetti, eran pavimentati con piastrelle rosse di piccolo formato: esagonali [. . .] . L'apotema di quelle mattonelle misurava centimetri 5,196: mentrechè il raggio del circolo circoscritto raggiungeva i 60 millimetri".



Esprimere la relazione esatta tra raggio del cerchio circoscritto ed apotema (ossia il raggio del cerchio inscritto) per un esagono regolare. Verificare il risultato ottenuto alla luce delle misure indicate dallo scrittore. Spiegare perché, utilizzando piastrelle esagonali regolari tutte congruenti, è possibile pavimentare un piano. Con quali altri poligoni regolare, tra loro congruenti, è possibile pavimentare un piano? Motivare la risposta.

<u>*Soluzione*</u>

Il triangolo ABO è un triangolo equilatero perché:

$\overline{AO} = \overline{BO} = r_{Circoscritto}$ $\qquad A\hat{O}B = \frac{360°}{6} = 60°$ $\qquad O\hat{A}B = A\hat{B}O = 60°$.

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AO} = \frac{1}{2} r_{Circoscritto} \; .$$

$$r_{\,Inscritto} = \overline{OH} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{r_C{}^2 - \left(\frac{1}{2}r_C\right)^2} = \sqrt{r_C{}^2 - \frac{1}{4}r_C{}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}r_C{}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r_C \; .$$

$$r_{\,Inscritto} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r_{Circoscritto}$$

Nel caso di Gadda si ha: $\quad 5{,}196\ cm = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\ cm$

La somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $(n-2)\cdot 180°$.

L'ampiezza di ogni angolo interno di un poligono regolare di n lati vale quindi: $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$.

Un piano pertanto si può pavimentare con poligoni regolari di n lati, se in ogni vertice convergono k poligoni, tali che: $k \cdot \frac{n-2}{n} \cdot 180° = 360°$, *logicamente con* $k \leq 3$.

Poligono regolare	Angolo interno	Numero poligoni che convergono in ogni vertice
Triangolo equilatero	60°	$k \cdot \frac{3-2}{3} \cdot 180° = 360°$; $\quad k \cdot \frac{1}{3} \cdot 180° = 360°$; $k \cdot 60° = 360°$; $\quad k = 6$.
Quadrato	90°	$k \cdot \frac{4-2}{4} \cdot 180° = 360°$; $\quad k \cdot \frac{1}{2} \cdot 180° = 360°$; $k \cdot 90° = 360°$; $\quad k = 4$.
Pentagono regolare	108°	$k \cdot \frac{5-2}{5} \cdot 180° = 360°$; $\quad k \cdot \frac{4}{5} \cdot 180° = 360°$; $k \cdot 144° = 360°$; $\quad k = 2{,}5$ *non è un numero intero*
Esagono regolare	120°	$k \cdot \frac{6-2}{6} \cdot 180° = 360°$; $\quad k \cdot \frac{4}{6} \cdot 180° = 360°$; $k \cdot 120° = 360°$; $\quad k = 3$.
Ottagono regolare	135°	$k \cdot \frac{8-2}{8} \cdot 180° = 360°$; $\quad k \cdot \frac{3}{4} \cdot 180° = 360°$; $k \cdot 135° = 360°$; $\quad k = 2,\overline{6}$ *non è un numero intero*