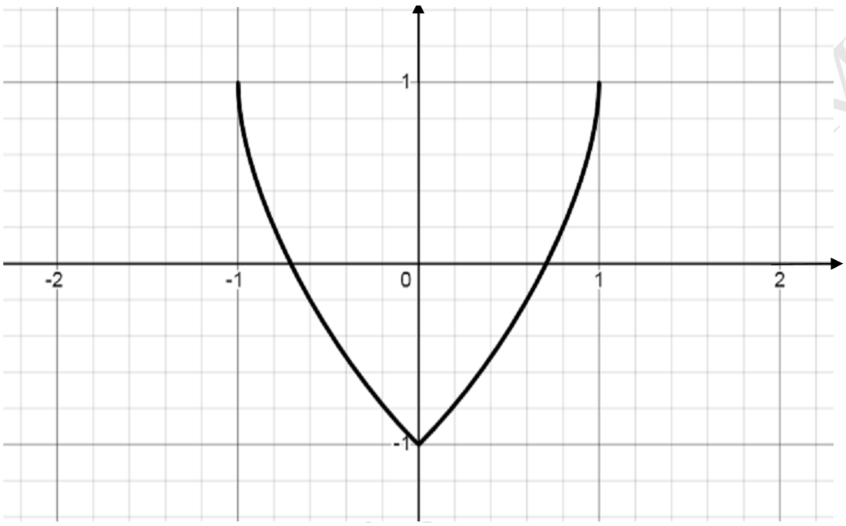
MATEMATICA

Problema 2

«All'inizio e alla fine, abbiamo il mistero. […] A questo mistero la matematica ci avvicina, pur senza penetrarlo». (E. De Giorgi)

Si consideri la famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$, con $n \in N$, $n > 1$ e $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

a) Verificare che, qualunque sia il valore di n, la funzione f_n non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. Determinare il valore di n in corrispondenza del quale il grafico di f_n presenta un punto angoloso. Per opportuni valori dei parametri a, b, il grafico α, in figura, rappresenta la funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$. Determinare i parametri a e b, considerando che f_2 è definita in $[-1; 1]$ e che il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



Si ponga, d'ora in avanti, $a = -1$, $b = 0$.

b) Studiare la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}$, verificando che non è derivabile negli estremi del dominio e nel punto di ascissa $x = 0$. Indicare con β il suo grafico e tracciare la curva $\gamma = \alpha \cup \beta$.

c) La retta r, di equazione $x = k$, con $-1 < k < 1$, interseca γ nei punti P e Q. Dimostrare che la misura del segmento PQ è massima quando r è asse di simmetria di γ.

d) Verificare che la funzione $H(x) = \frac{1}{2}\left(arcsen(x) + x\sqrt{1 - x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Con il metodo che si ritiene più opportuno, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ.

«Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle: le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è posto perenne per la matematica brutta». (G. H. Hardy)

Punto a – Parte 1

Metodo 1

Studiamo la derivabilità della famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2+bx+1}$ *distinguendo 3 casi:*

Caso $n = 2$

Funzione	$f_2(x) = \sqrt[2]{x^2} - \sqrt{ax^2+bx+1} = \lvert x\rvert - \sqrt{ax^2+bx+1} =$ $f_2(x) = \begin{cases} +x - \sqrt{ax^2+bx+1} & se\ x \geq 0 \\ -x - \sqrt{ax^2+bx+1} & se\ x < 0 \end{cases}$
Derivata prima	$f'_2(x) = \begin{cases} +1 - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} & se\ x > 0 \\ -1 - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} & se\ x < 0 \end{cases}$
Derivata destra in $x = 0$	$f'_{n^+}(0) = \lim_{x\to 0^+}\left[+1 - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right] = +1 - \dfrac{b}{2}$.
Derivata sinistra in $x = 0$	$f'_{n^-}(0) = \lim_{x\to 0^-}\left[-1 - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right] = -1 - \dfrac{b}{2}$.

Essendo $+1 - \frac{b}{2} \neq -1 - \frac{b}{2} \quad \forall b \in R$

la funzione, per $n = 2$*, non è derivabile in* $x = 0$ *e presenta in esso un punto angoloso.*

Caso $n > 2$ dispari

Funzione	$f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2+bx+1}$ $f_n(x) = x^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2+bx+1}$
Derivata prima $\begin{pmatrix} n > 2 \Rightarrow \\ n-2 > 0 \end{pmatrix}$	$f'_n(x) = \frac{2}{n}x^{\frac{2}{n}-1} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} = \frac{2}{n}x^{\frac{2-n}{n}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}$ $f'_n(x) = \dfrac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}$
Derivata destra in $x = 0$	$f'_{n^+}(0) = \lim_{x\to 0^+}\left[\dfrac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right] = (+\infty) - \left(\dfrac{b}{2}\right) = +\infty$.
Derivata sinistra in $x = 0$	$f'_{n^-}(0) = \lim_{x\to 0^-}\left[\dfrac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right] = (-\infty) - \left(\dfrac{b}{2}\right) = -\infty$.

Pertanto, per $n \geq 3$ *dispari, la funzione non è derivabile in* $x = 0$ *e presenta in esso una cuspide.*

Caso $n > 2$ pari

Funzione	$f_n(x) \;=\; \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2+bx+1} \;=\; \lvert x\rvert^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2+bx+1} \;=$ $f_n(x) \;=\; \begin{cases} +x^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2+bx+1} & se\ x \geq 0 \\ -x^{\frac{2}{n}} - \sqrt{ax^2+bx+1} & se\ x < 0 \end{cases}$
Derivata prima $\begin{pmatrix} n > 2 & \Rightarrow \\ n-2 > 0 \end{pmatrix}$	$f'_n(x) \;=\; \begin{cases} +\dfrac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} & se\ x > 0 \\ -\dfrac{2}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-2}}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}} & se\ x < 0 \end{cases}$
Derivata destra in $x=0$	$f'_{n^+}(0) \;=\; \lim\limits_{x\to 0^+}\left[+\dfrac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right] \;=\; (+\infty) - \left(\dfrac{b}{2}\right) \;=\; +\infty\,.$
Derivata sinistra in $x=0$	$f'_{n^-}(0) \;=\; \lim\limits_{x\to 0^-}\left[-\dfrac{2}{n\sqrt[n]{(-x)^{n-2}}} - \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+1}}\right] \;=\; (-\infty) - \left(\dfrac{b}{2}\right) \;=\; -\infty\,.$
Pertanto, per $n > 2$ pari, la funzione non è derivabile in $x = 0$ e presenta in esso una cuspide.	

In definitiva la famiglia di funzioni $f_n(x)$ non è derivabile in $x = 0$ $\quad \forall n \in N$.

Metodo 2 – Soluzione a cura di Giovanni Bellino

Studiamo la derivabilità della famiglia di funzioni $f_n(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ *utilizzando la definizione di derivata (limite del rapporto incrementale).*

$$f_n'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f_n'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt[n]{h^2} - \sqrt{ah^2+bh+1}\right) - \left(\sqrt[n]{0^2} - \sqrt{a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + 1}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{h^2} - \sqrt{ah^2+bh+1} + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{h^2}}{h} \qquad \textit{Essendo } \lim_{h\to 0} \sqrt{ah^2+bh+1} = 1$$

Consideriamo i seguenti casi:

Caso $n = 2$

$$f_2'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[2]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \Rightarrow \begin{cases} (f_2')_+(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{+h}{h} = +1 \\ (f_2')_-(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

Pertanto per $n = 2$ *la funzione* $f_2(x)$ *non è derivabile in* $x = 0$ *e presenta in esso un punto angoloso.*

Caso $n > 2$ dispari $\qquad n - 2 > 0$ dispari

$$f_n'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[n]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{2}{n}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{1-\frac{2}{n}}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{n-2}{n}}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[n]{h^{n-2}}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (f_n')_+(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[n]{h^{n-2}}} = +\infty \\ (f_n')_-(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[n]{h^{n-2}}} = -\infty \end{cases}$$

Caso $n > 2$ *pari* $\quad n-2>0$ *pari*

$$f'_n(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[n]{h^2}}{h}$$

$$(f'_n)_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[n]{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|^{\frac{2}{n}}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{+h^{\frac{2}{n}}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[n]{h^{n-2}}} = +\infty \; .$$

$$(f'_n)_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[n]{h^2}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[n]{h^2} \cdot \sqrt[n]{h^{n-2}}}{h \cdot \sqrt[n]{h^{n-2}}} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[n]{h^n}}{h \cdot \sqrt[n]{h^{n-2}}} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h \cdot \sqrt[n]{h^{n-2}}} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h \cdot \sqrt[n]{h^{n-2}}} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt[n]{h^{n-2}}} = -\infty$$

Pertanto per $n > 2$ *la famiglia di funzioni* $f_n(x)$ *non è derivabile in* $x = 0$ *e presenta in esso una cuspide.*

In definitiva la famiglia di funzioni $f_n(x)$ *non è derivabile in* $x = 0$ $\quad \forall n \in N$.

Metodo 3

Il terzo metodo consiste nell'esaminare separatamente la derivabilità delle due funzioni che formano $f_n(x)$.

La funzione $h\,(x) = \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ *è definita, continua e derivabile in* $x = 0$. *Infatti:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + 1}} = \frac{b}{2}$$

La funzione $h_n(x) = \sqrt[n]{x^2}$ *è definita, continua ma non derivabile in* $x = 0$. *Infatti:*

Caso $n = 2$

$$h_2(x) = \sqrt[2]{x^2} = |x| = \begin{cases} +x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

$$h'_{2^+}(0) = \lim_{x \to 0^+} +1 = +1$$
$$h'_{2^-}(0) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

punto angoloso in $x = 0$

Caso $n > 2$ *pari o dispari*

$$h_n(x) = \sqrt[n]{x^2}$$

$$h'_n(x) = \frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} \qquad h'_{n^+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{n\sqrt[n]{x^{n-2}}} = +\infty$$

$f_n(x)$ *non è derivabile in* $x = 0$

Si conclude pertanto che la funzione $f_n(x) = h_n(x) + h\,(x)$ *non è derivabile in* $x = 0$ *e per* $n = 2$ *presenta in esso un punto angoloso.*

Punto a – Parte 2

Per determinare i parametri a e b della funzione $f_2(x) = |x| - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ *rappresentata dal grafico* α *imponiamo, per come si evince dal grafico, il passaggio della curva per i punti:* $(-1\,;+1)$ *e* $(+1\,;+1)$.

Si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} +1 = |-1| - \sqrt{a(-1)^2 + b(-1) + 1} \\ +1 = |+1| - \sqrt{a(+1)^2 + b(+1) + 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 1 - \sqrt{a - b + 1} \\ 1 = 1 - \sqrt{a + b + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a - b + 1} = 0 \\ \sqrt{a + b + 1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - b + 1 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

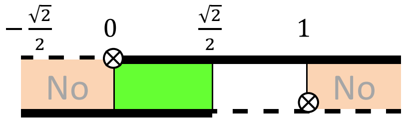
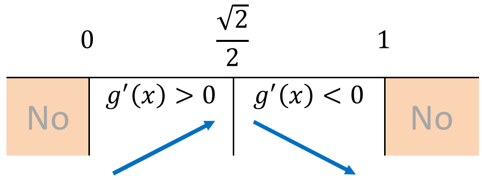
Si ottiene la funzione: $f_2(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2}$.

Punto b

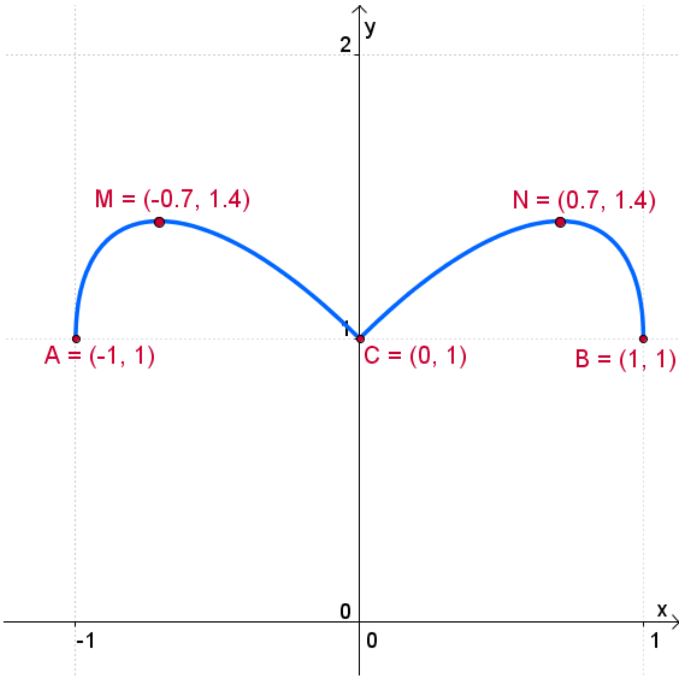
Studiamo la funzione $g\,(x) \;=\; |x| + \sqrt{1-x^2} \;=\; \begin{cases} +x+\sqrt{1-x^2} & se \quad 0 \le x \le 1 \\ -x+\sqrt{1-x^2} & se \quad -1 \le x < 0 \end{cases}$

Dominio	$D = \{x \in R \;/\; -1 \le x \le 1\}$
$g\,(x) = 0$	$\|x\| + \sqrt{1-x^2} = 0\,;\qquad \sqrt{1-x^2} = -\|x\| \qquad \nexists\, x \in R\,.$
$g\,(x) > 0$	$\|x\| + \sqrt{1-x^2} > 0 \qquad \forall x \in D$ *perché somma di quantità non negative.*
Simmetrie	$g\,(-x) = \|-x\| + \sqrt{1-(-x)^2} \;=\; \|x\| + \sqrt{1-x^2} = +g(x)$ *funzione simmetrica rispetto asse y*
Limiti e Asintoti	*La funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato* $[-1;1]$ *, pertanto, non ci sono asintoti verticali, orizzontali e obliqui.* *Per il teorema di Weierstrass assume nell'intervallo* $[-1;1]$ *massimo e minimo assoluti.* *La curva* β *passa per i punti:* $A\,(-1\,;+1)\,,\; B\,(+1\,;+1)\;\; e\;\; C\,(0\,;+1).$ $g\,(-1) = \;\|-1\| + \sqrt{1-(-1)^2} = 1$ $g\,(+1) \;=\; \|+1\| + \sqrt{1-1^2} \;=\; 1$ $g\,(0) \;=\; \|0\| + \sqrt{1-0^2} \;=\; 1$
Derivata prima	$g'\,(x) \;=\; \begin{cases} +1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} & se \quad 0 \le x \le 1 \\ -1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} & se \; -1 \le x < 0 \end{cases} \qquad g'\,(x) \;=\; \begin{cases} +1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & se \quad 0 \le x \le 1 \\ -1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & se \; -1 \le x < 0 \end{cases}$
Dominio di $g'(x)$	$g'(x)$ *è definita in* $\;]-1\,,0[\;\; \cup \;\;]0\,,1[$
Derivabilità in $x = 0$	$g'_+(0) \;=\; \lim\limits_{x\to 0^+}\left[+1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] \;=\; +1$ $g'_-(0) \;=\; \lim\limits_{x\to 0^-}\left[-1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] \;=\; -1$ *punto angoloso in* $x = 0$
Derivabilità in $x = +1$	$g'_-(+1) \;=\; \lim\limits_{x\to +1^-}\left[+1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] \;=\; -\infty \qquad g\,(x)$ *non è derivabile in* $x = +1$
Derivabilità in $x = -1$	$g'_+(-1) \;=\; \lim\limits_{x\to -1^+}\left[-1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] \;=\; +\infty \qquad g\,(x)$ *non è derivabile in* $x = -1$

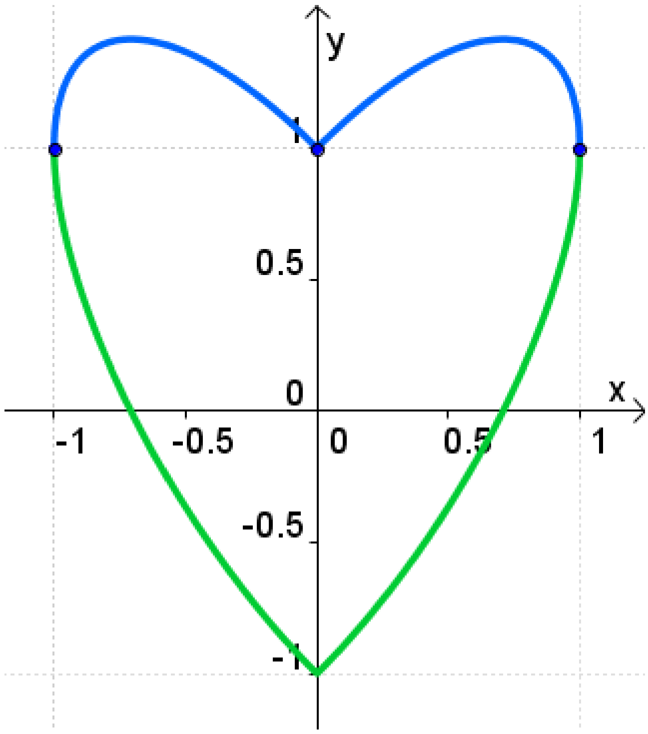
Essendo la funzione pari, continuiamo lo studio della funzione nell'intervallo $]0\,,1[$ (*)

$g'(x)=0$	$+1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0\,;\quad \sqrt{1-x^2}-x=0\,;\quad \sqrt{1-x^2}=x\,;$ $\begin{cases} x\geq 0 \\ 1-x^2=x^2 \end{cases}\quad 2x^2=1\,;\quad x_{1,2}=\begin{matrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \textit{non accettabile } (*) \\ +\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \textit{accettabile} \end{matrix}$
$g'(x)>0$	$+1-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}>0;\quad \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}>0;\quad$ *Essendo* $\sqrt{1-x^2}>0\ \ \forall x\in\,]0\,,1[$ *studiamo* $\sqrt{1-x^2}-x>0$ $\sqrt{1-x^2}>x\quad \begin{cases} x>0 \\ 1-x^2>x^2 \end{cases}\quad \begin{cases} x>0 \\ 1-2x^2>0 \end{cases}\quad \begin{cases} x>0 \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ 
Max e min	$g\,(x)$ *è crescente in* $\left]0\,,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ $g\,(x)$ *è decrescente in* $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}\,,1\right[$ 
	$g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{1-\dfrac{1}{2}}=+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$
	Data la simmetria della funzione: $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\sqrt{2}\right)$ *e* $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\sqrt{2}\right)$ *sono punti di massimo relativo e assoluto* $A\,(-1\,;\,1)\,,\ \ B\,(1\,;\,1)$ *e* $C\,(0\,;\,1)$ *sono punti di minimo assoluto.*

Il grafico β *della funzione* $g\,(x)=|x|+\sqrt{1-x^2}$ *è sotto rappresentato.*



Il grafico della curva $\gamma = \alpha \cup \beta$ *è sotto rappresentato.*



Punto c

Prendiamo il punto $P \in \beta$ *e il punto* $Q \in \alpha$.

I punti P e Q hanno coordinate:

$P\left(k\ ;\ |k| + \sqrt{1-k^2}\right)$ *e* $Q\left(k\ ;\ |k| - \sqrt{1-k^2}\right)$

con $-1 < k < 1$.

Calcoliamo la misura del segmento PQ :

Essendo $y_P > y_Q \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} = y_P - y_Q$

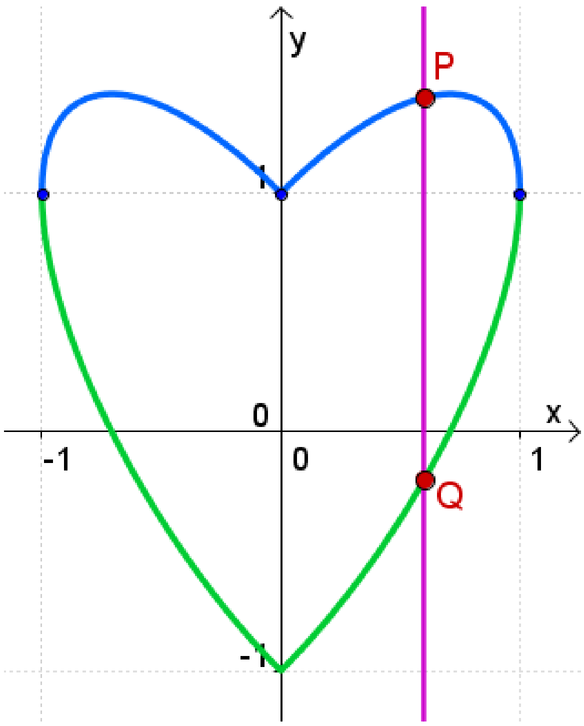
$d\,(k) = \overline{PQ} = \left(|k| + \sqrt{1-k^2}\right)\ k = 0$

$d\,(k) = 2\sqrt{1-k^2}$.

Tale funzione è massima per $k = 0$.

Tale valore individua la retta $x = 0$, *asse di simmetria di* γ .

La lunghezza della corda massima PQ è $d\,(0) = 2$.



Punto d

Per verificare che $H(x) = \frac{1}{2}\left(arcsin(x) + \; x\sqrt{1-x^2}\right)$ *è una primitiva di* $h(x)$ *è sufficiente dimostrare che:*
$H'(x) = h(x) \qquad con \quad -1 < k < 1\,.$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H'(x)} \;&=\; \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \,1\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right] \;=\\
&=\; \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \,1\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] \;=\\
&=\; \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1+(1-x^2)-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] \;=\\
&=\; \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] \;=\\
&=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \;=\\
&=\; \frac{(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \;=\\
&=\; \frac{(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \;=\\
&=\; \frac{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} \;=\\
&=\; \sqrt{1-x^2} \;=\; \boldsymbol{h(x)}\,.
\end{aligned}
$$

Determiniamo l'area della regione finita di piano delimitata da γ .

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S_\gamma} \;&=\; 2\cdot\int_0^1 [\,g\,(x) - f_2\,(x)]\;dx \;=\\
&=\; 2\cdot\int_0^1 \left[\left(|x| + \sqrt{1-x^2}\right) - \left(|x| - \sqrt{1-x^2}\right)\right]\,dx \;=\\
&=\; 2\cdot\int_0^1 2\,\sqrt{1-x^2}\;dx \;=\\
&=\; 4\cdot\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\;dx \;=\\
&=\; 4\cdot[\,H(x)\,]_0^1 \;=\\
&=\; 4\cdot\left[\frac{1}{2}\left(arcsin(x) + \;x\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 \;=\\
&=\; 4\cdot\left[\frac{1}{2}\left(arcsin(1) + \;1\cdot\sqrt{1-1^2}\right) - \frac{1}{2}\left(arcsin(0) + \;0\cdot\sqrt{1-0^2}\;\right)\right] \;=\\
&=\; 4\cdot\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \;1\cdot\sqrt{0}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \;0\cdot\sqrt{1}\;\right)\right] \;=\\
&=\; 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \;=\\
&=\; \boldsymbol{\pi}\,.
\end{aligned}
$$