Problema 1

Si consideri $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3+b}{x^2}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinare i valori dei parametri in modo che la retta t, di equazione $7x + y - 12 = 0$, sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel suo punto P di ascissa $x = 1$.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$ e $b = 4$.

b) Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ e tracciarne il grafico γ. Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P.

c) Al variare del parametro reale m, determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$ e la curva γ.

d) Sia $S(k)$, con $k > \frac{3}{2}$, l'area della regione finita di piano compresa tra la curva γ, il suo asintoto obliquo, la retta t e la retta di equazione $x = k$. Calcolare il $\lim_{k \to +\infty} S(k)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

Punto a

Il punto P di ascissa $x = 1$ *, dovendo appartenere alla retta* $7x + y - 12 = 0$ *, ha ordinata* $y = 5$*:*

$7 \cdot 1 + y - 12 = 0$; $\qquad y = 5$. *Pertanto le coordinate del punto P sono:* $P\ (1\,;5)$.

Per determinare i valori dei parametri a e b imponiamo le due condizioni:

- *Passaggio del grafico della funzione per il punto* $P\ (1\,;5)$ *:* $5 = a \cdot 1 + \frac{b}{1^2}$; $\qquad a + b = 5$.
- $f'(x = 1) = m_t$;

$$f'(x) = \frac{3ax^2 \cdot x^2 - 2x \cdot (ax^3 + b)}{x^4} = \frac{3ax^4 - 2ax^4 - 2bx}{x^4} = \frac{ax^4 - 2bx}{x^4} = \frac{x(ax^3 - 2b)}{x^4} \; ;$$

$$f'(x = 1) = m_t \; ; \qquad \frac{1(a1^3 - 2b)}{1^4} = -7 \; ; \qquad a - 2b = -7$$

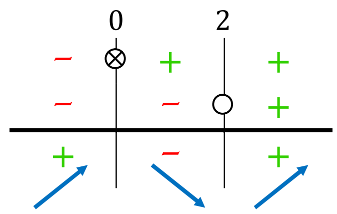
Risolvendo il sistema fra queste due equazioni nelle incognite a e b si ottiene:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - 2b = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 5 - b \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 5 - b - 2b = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ b = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

La funzione richiesta è pertanto: $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

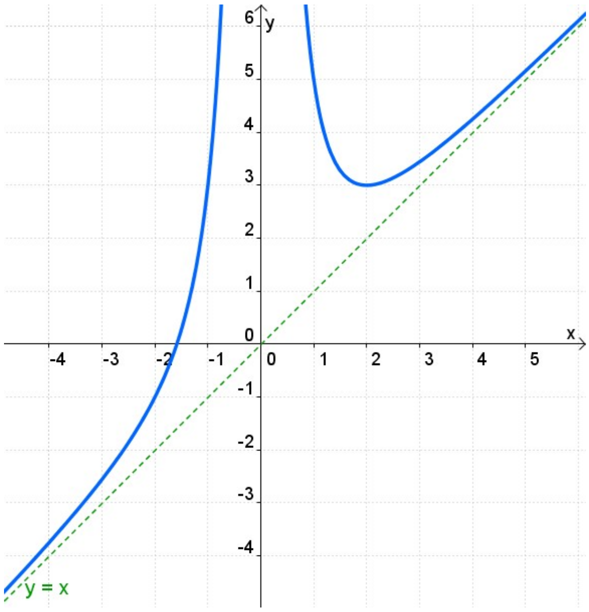
Punto b

Studiamo la funzione: $\quad \boldsymbol{y = \dfrac{x^3+4}{x^2}}$

Dominio	$D = \{x \in R \ / \ \ x \neq 0\}$		
$f(x) = 0$	$\dfrac{x^3+4}{x^2} = 0\,; \qquad x^3+4=0\,; \qquad x^3 = -4\,; \qquad x = -\sqrt[3]{4}\,.$		
$f(x) > 0$	$\dfrac{x^3+4}{x^2} > 0\,;$ $Essendo\ x^2 > 0 \ \ \forall x \in D \ \Rightarrow \ x^3+4>0\,; \qquad x^3 > -4\,; \qquad x > -\sqrt[3]{4}\,.$		
Simmetrie	$f(-x) = \dfrac{(-x)^3+4}{(-x)^2} = \dfrac{-x^3+4}{x^2} \neq \begin{cases} +f(x) \\ -f(x) \end{cases}$		
Limiti e Asintoti	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+4}{x^2} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty} = F.I.\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\cdot\left(1+\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\dfrac{4}{x^3}\right) = +\infty\,.$		
$y = x$ *è un Asintoto obliquo*	$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+4}{x^3} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\cdot\left(1+\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{4}{x^3}\right) = 1$		
	$q = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^3+4}{x^2} - 1x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0\,.$		
	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+4}{x^2} = -\infty$	$m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$	$q = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-mx] = -\infty$
$x = 0$ *è un Asintoto verticale*	$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^3+4}{x^2} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^3+4}{x^2} = +\infty$	
Derivata prima	$f'_{a=1,\ b=4}(x) = \left[\dfrac{x(ax^3-2b)}{x^4}\right]_{a=1,\ b=4} = \dfrac{x(1\cdot x^3 - 2\cdot 4)}{x^4} = \dfrac{x(x^3-8)}{x^4}\,.$		
$f'(x) = 0$	$\dfrac{x(x^3-8)}{x^4} = 0\,; \qquad x(x^3-8) = 0\,; \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$		
$f'(x) > 0$	$\dfrac{x(x^3-8)}{x^4} > 0\,; \qquad Essendo \ \ x^4 > 0 \quad \forall x \in D \quad \Rightarrow \quad x(x^3-8) > 0\,;$ $x(x-2)(x^2+2x+4) > 0 \qquad Essendo \ \ x^2+2x+4 > 0 \quad \forall x \in D \quad \Rightarrow$ $\begin{matrix} x > 0 \\ x-2 > 0 \end{matrix} \ \Big\vert \ \begin{matrix} x > 0 \\ x > 2 \end{matrix}$  *La funzione è crescente per* $x < 0 \ \ \vee \ \ x > 2\,;$ *La funzione è decrescente per* $0 < x < 2\,;$ *Pertanto in* $x = 2$ *la funzione ha un minimo relativo.* $f(2) = \dfrac{2^3+4}{2^2} = \dfrac{8+4}{4} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad M\,(2\,;3)$ $\ \ punto\ di\ minimo\ relativo.$		

	$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x(x^3-8)}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3-8}{x^3} = -\infty$	$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x(x^3-8)}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3-8}{x^3} = +\infty$
Derivata seconda	$f''(x) = \dfrac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^3-8)}{(x^3)^2} = \dfrac{3x^5 - 3x^5 + 24x^2}{x^6} = \dfrac{24x^2}{x^6} = \dfrac{24}{x^4}.$	
$f''(x) > 0$	$\dfrac{24}{x^4} > 0 \quad \forall x \in D$	*La funzione ha concavità sempre positiva.*

Il grafico della funzione è riportato a lato.



Per trovare l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva nel punto P occorre innanzitutto trovare il fascio di rette proprio passante per il punto P $(1\,;5)$ *.*

L'equazione del fascio di rette proprio passante per il punto P $(1\,;5)$ *è:*

$y - y_P = m \cdot (x - x_P)\,;\qquad y - 5 = m \cdot (x-1)\,;\qquad y = mx - m + 5\,.$

Risolvere il sistema formato fra l'equazione del fascio di rette e l'equazione della curva:

$$\begin{cases} y = mx - m + 5 \\ y = \dfrac{x^3+4}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ mx - m + 5 = \dfrac{x^3+4}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ mx^3 - mx^2 + 5x^2 = x^3 + 4 \end{cases}$$

$(m-1)x^3 + (5-m)x^2 - 4 = 0\,;$

Di questa equazione conosciamo già una soluzione $x = 1$ *.*

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$(x-1) \cdot \big((m-1)x^2 + 4x + 4\big) = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & m-1 & 5-m & 0 & -4 \\ 1 & & m-1 & +4 & +4 \\ \hline & m-1 & +4 & +4 & 0 \end{array}$$

$(x-1) \cdot \big((m-1)x^2 + 4x + 4\big) = 0\,;\qquad \begin{matrix} x = 0 \\ (m-1)x^2 + 4x + 4 = 0 \end{matrix}$

Imponiamo la condizione di tangenza, cioè $\Delta = 0$ *:*

$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0\,;\qquad 4^2 - 4 \cdot (m-1) \cdot 4 = 0\,;\qquad 16 - 16m + 16 = 0\,;\qquad m = 2\,.$

Pertanto l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva nel punto P $(1\,;5)$ *è :*

$y = mx - m + 5\,;\qquad y = 2x + 3\,.$

Punto c

Per determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y = mx - m + 5$ *e la curva* γ *, consideriamo il sistema formato dalle equazioni di queste due curve:*

$$\begin{cases} y = mx - m + 5 \\ y = \dfrac{x^3+4}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ mx - m + 5 = \dfrac{x^3+4}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ mx^3 - mx^2 + 5x^2 = x^3 + 4 \end{cases}$$

Da questa equazione ricavo m *:*

$$m(x^3 - x^2) = x^3 - 5x^2 + 4 \, ; \qquad m = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^3 - x^2} \, ;$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$x^3 - 5x^2 + 4 = (x-1)\cdot(x^2 - 4x - 4)$$

	1	-5	0	$+4$
1		$+1$	-4	-4
	1	-4	-4	0

Si ottiene:

$$m = \frac{(x-1)\cdot(x^2-4x-4)}{x^2\cdot(x-1)} \, ; \qquad m = \frac{x^2-4x-4}{x^2} \qquad con\ x \neq 1$$

$(Per\ x = 1\ \ si\ ha\ il\ punto\ P(1;5)$ $(*)$.

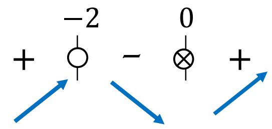
Poniamo $y = m$ *e risolviamo graficamente il sistema:* $\begin{cases} y = m \\ y = \dfrac{x^2-4x-4}{x^2} \end{cases}$

Tracciamo i grafici delle due funzioni:

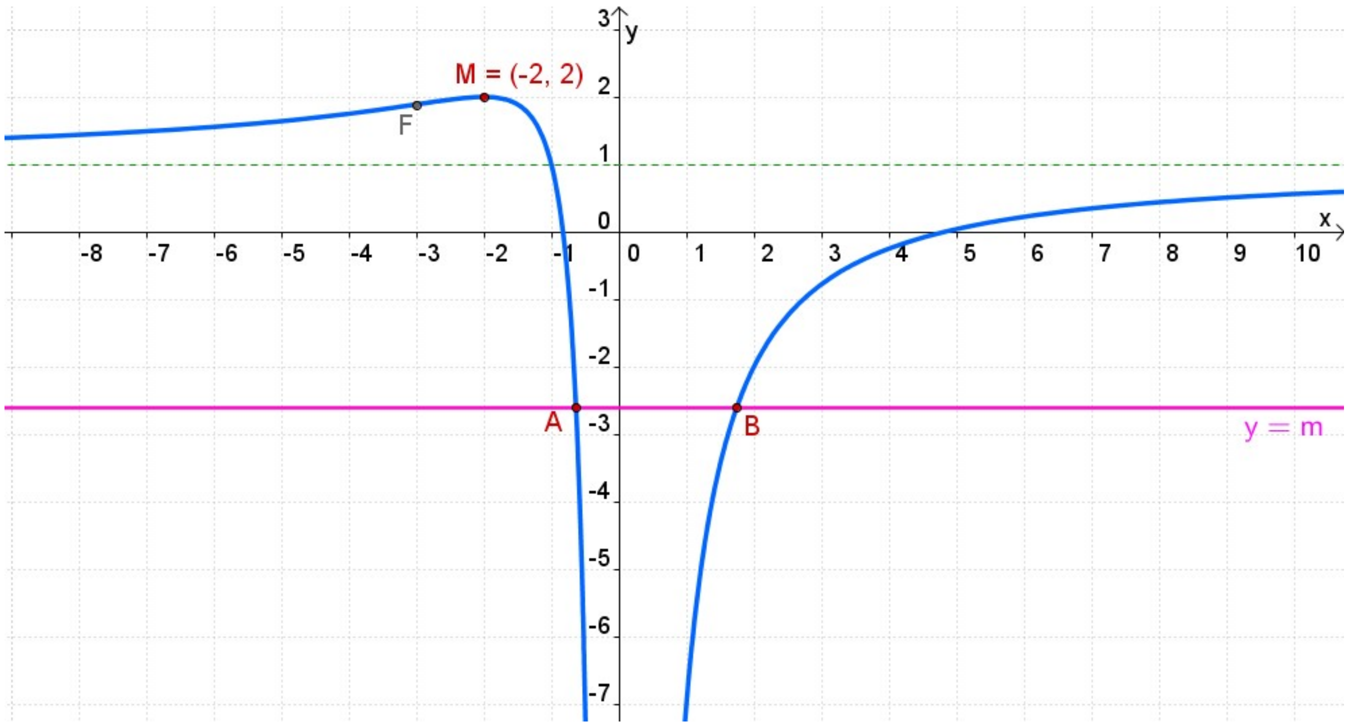
La funzione $y = m$ *è un fascio improprio di rette orizzontali.*

Studiamo la funzione: $y = \dfrac{x^2-4x-4}{x^2}$

Dominio	$D = \{x \in R \ / \ \ x \neq 0\}$
$f(x) = 0$	$\dfrac{x^2-4x-4}{x^2} = 0\,;$ $\quad x^2 - 4x - 4 = 0\,;$ $\quad \dfrac{\Delta}{4} = 4 + 4 = 8$ $\quad x_{1,2} = 2 \mp \sqrt{8} = \ 2 \mp 2\sqrt{2}\,.$
$f(x) > 0$	$\dfrac{x^2-4x-4}{x^2} > 0\,;$ $\quad x^2 > 0\ \ \forall x \in D \ \Rightarrow\ x^2 - 4x - 4 > 0\,;$ $\quad x < 2 - 2\sqrt{2}\ \vee\ x > 2 + 2\sqrt{2}$
Limiti e Asintoti	$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x^2-4x-4}{x^2} = \left[\dfrac{+\infty}{+\infty} = F.I.\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\cdot\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right) = 1$
	$y = 1$ *è un asintoto orizzontale*
	$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-4x-4}{x^2} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-4x-4}{x^2} = -\infty$ $\quad x = 0$ *è un asintoto verticale*
Derivata prima	$f'\,(x) = \dfrac{(2x-4)\cdot x^2 - 2x\cdot(x^2-4x-4)}{(x^2)^2} = \dfrac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 8x^2 + 8x}{x^4} = \dfrac{4x^2+8x}{x^4}$
$f'(x) = 0$	$\dfrac{4x^2+8x}{x^4} = 0\,;$ $\quad 4x^2 + 8x = 0\,;$ $\quad 4x\cdot(x+2) = 0\,;$ $\quad x_1 = -2$, $x_2 = 0$

$f'(x)>0$	$\dfrac{4x^2+8x}{x^4}>0\,;\qquad$ *Essendo* $x^4>0\quad \forall x\in D\qquad \Rightarrow\qquad 4x^2+8x>0\,;$ $4x\cdot(x+2)>0\,;\qquad\qquad x<-2\quad\vee\quad x>0\,.$  *La funzione è crescente per* $x<-2\quad\vee\quad x>0\,;$ *La funzione è decrescente per* $-2<x<0\,;$ *Pertanto in* $x=-2$ *la funzione ha un massimo relativo.* $f(-2)=\dfrac{(-2)^2-4\cdot(-2)-4}{(-2)^2}=\dfrac{4+8-4}{4}=2\,.$ $\Rightarrow\qquad M\,(-2\,;2)$ *punto di massimo relativo.*
Derivata seconda	$f\;''(x)=\dfrac{(8x+8)\cdot x^4-4x^3\cdot(4x^2+8x)}{(x^4)^2}=\dfrac{8x^5+8x^4-16x^5-32x^4}{x^8}=$ $=\dfrac{-8x^5-24x^4}{x^8}=-\dfrac{8x^4(x+3)}{x^8}=-\dfrac{8(x+3)}{x^4}\,.$
$f''(x)>0$	$-\dfrac{8(x+3)}{x^4}>0\qquad -8(x+3)>0\,;\qquad x+3<0\,;\qquad x<-3\,.$
	La funzione ha concavità sempre positiva per $x<-3\,;$ *La funzione ha concavità sempre negativa per* $-3<x<0\quad\vee\quad x>0\,.$ *In* $x=-3$ *c'è un flesso .*

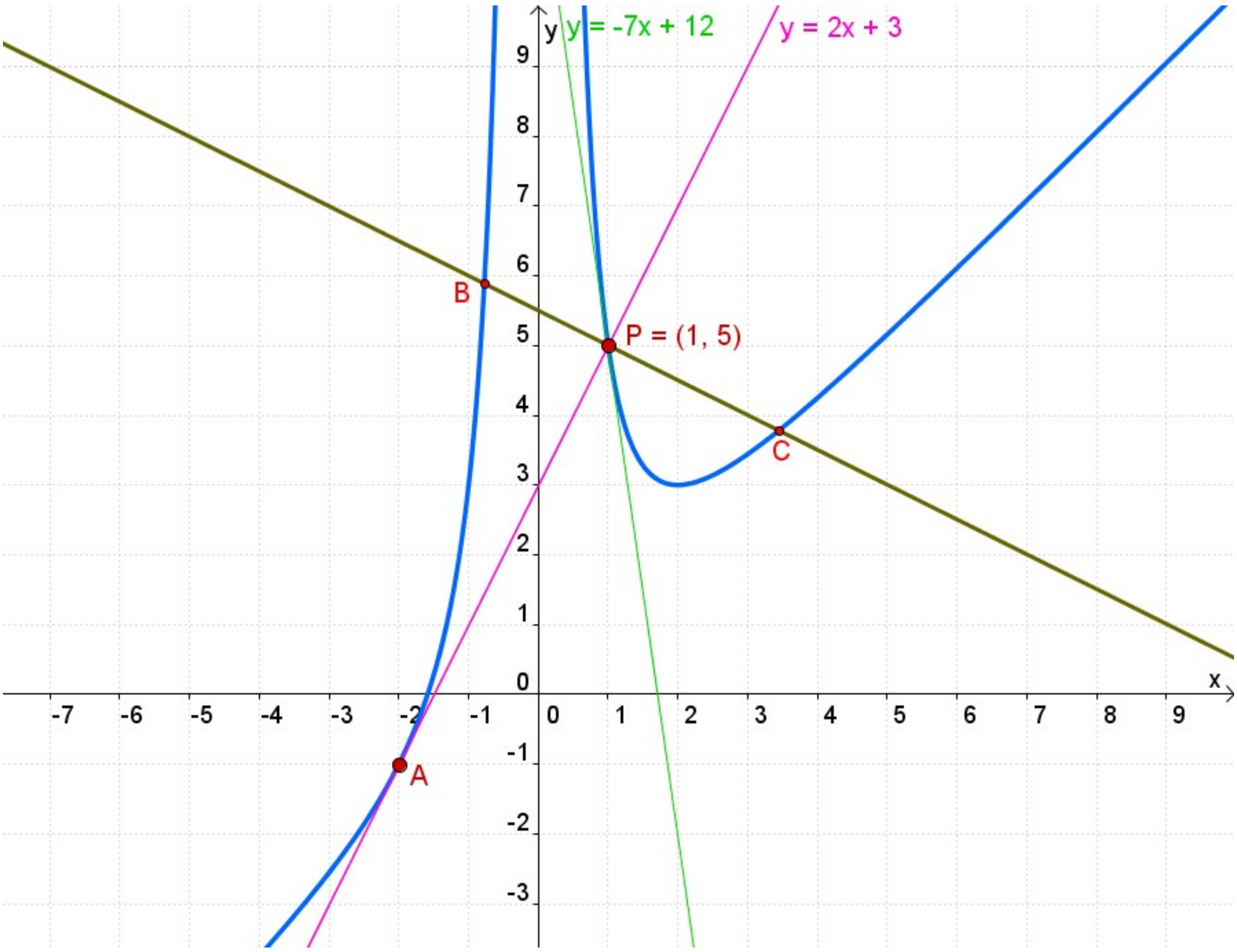
Si ottiene il seguente grafico del sistema : $\begin{cases} y=m \\ y=\dfrac{x^2-4x-4}{x^2}\end{cases}$



Dal quale si ricava il numero di intersezioni (occorre aggiungere sempre 1 per $(*)$).

m	**Numero intersezioni**
$m < 1$	$2 + 1 = 3$ *intersezioni*
$m = 1$	$1 + 1 = 2$ *intersezioni*
$1 < m < 2$	$2 + 1 = 3$ *intersezioni*
$m = 2$	$1 + 1 = 2$ *intersezioni (di cui una è doppia)*
$m > 2$	$0 + 1 = 1$ *intersezione*

La discussione sul numero di intersezioni tra la retta di equazione $y = mx - m + 5$ e la curva γ poteva essere svolta anche graficamente esaminando il grafico delle due curve:

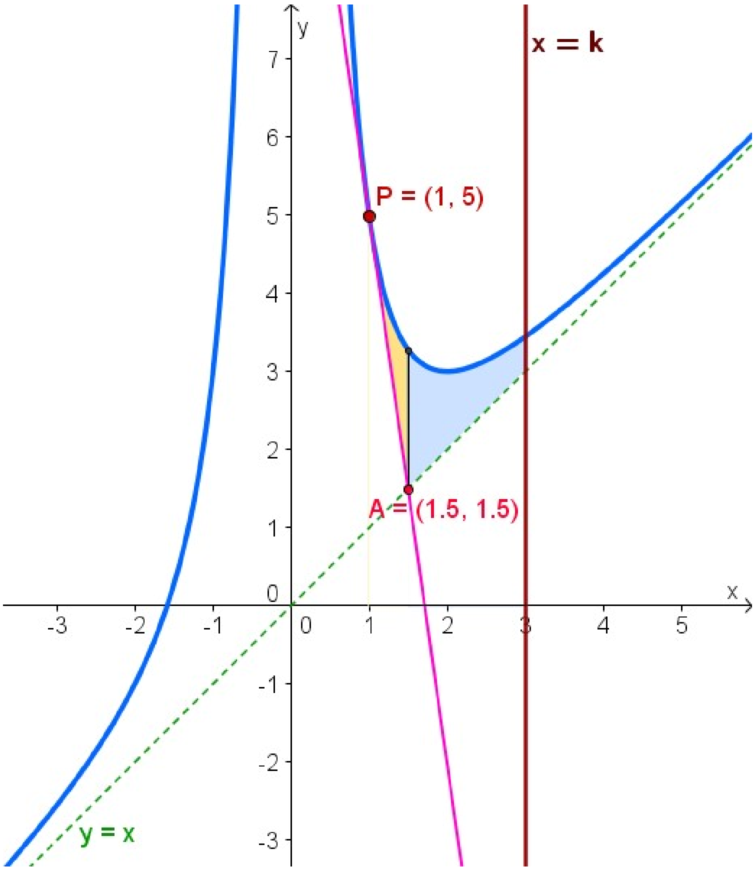


Punto d

Determiniamo le coordinate del punto di intersezione fra la retta t e l'asintoto della curva:

$$\begin{cases} y = -7x + 12 \\ y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -7x + 12 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 12 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{3}{2} \,;\, \frac{3}{2}\right)$$



$S(k) = S_{Gialla} + S_{Azzurra}$

$$S_{Gialla} = \int_1^{\frac{3}{2}} \left[\frac{x^3+4}{x^2} - (-7x+12)\right] dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \left[x + \frac{4}{x^2} + 7x - 12\right] dx =$$

$$= \int_1^{\frac{3}{2}} \left[8x + \frac{4}{x^2} - 12\right] dx = \left[\frac{8x^2}{2} - \frac{4}{x} - 12x\right]_1^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{8 \cdot \frac{9}{4}}{2} - \frac{4}{\frac{3}{2}} - 12 \cdot \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{8 \cdot 1}{2} - \frac{4}{1} - 12 \cdot 1\right) =$$

$$= \left(9 - \frac{8}{3} - 18\right) - (4 - 4 - 12) = -\frac{35}{3} + 12 = \frac{-35+36}{3} = \frac{1}{3} .$$

$$S_{Azzurra} = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left[\frac{x^3+4}{x^2} - x\right] dx = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left[x + \frac{4}{x^2} - x\right] dx = \int_{\frac{3}{2}}^{k} \left[\frac{4}{x^2}\right] dx =$$

$$= \left[-\frac{4}{x}\right]_{\frac{3}{2}}^{k} = \left(-\frac{4}{k}\right) - \left(-\frac{4}{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{4}{k} + \frac{8}{3} .$$

$$S(k) = S_{Gialla} + S_{Azzurra} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{k} = 3 - \frac{4}{k} .$$

Il limite: $\lim\limits_{k \to +\infty} S(k) = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(3 - \frac{4}{k}\right) = 3$

rappresenta il limite a cui tende l'area tra la curva, la tangente t *e l'asintoto obliquo quando la retta* $x = k$ *si sposta verso destra tendendo a* $+\infty$.