ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

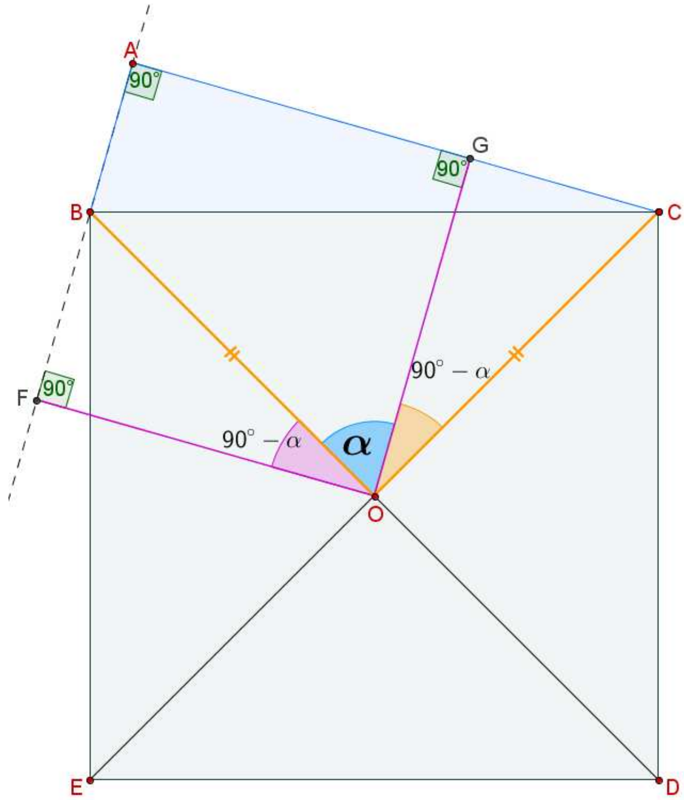
Anno scolastico 2022/2023

MATEMATICA

Quesiti

Quesito 1

Sia *ABC* un triangolo rettangolo in *A*. Sia *O* il centro del quadrato *BCDE* costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice *A*. Dimostrare che *O* è equidistante dalle rette *AB* e *AC*.



IPOTESI		TESI
$\hat{A} = 90°$ $BCDE$ *è un quadrato* O *è il centro del quadrato*	$\Rightarrow$	$d(0\,;AB) = d(0\,;AC)$

Dimostrazione

Ricordiamo innanzitutto che il centro del quadrato è il punto di intersezione delle due diagonali. Inoltre le diagonali di un quadrato sono congruenti, perpendicolari tra loro e si dimezzano scambievolmente.

Tracciamo quindi i segmenti di perpendicolare OF e OG condotti dal punto O ai lati AB e AC del triangolo ABC.

Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC equivale a dimostrare che $OF \cong OG$.

Per dimostrare che $OF \cong OG$, *è sufficiente dimostrare che i triangoli OBF e OCG sono congruenti.*

I triangoli OBF e OCG sono congruenti per il II Criterio di congruenza generalizzato dei triangoli. Infatti:

$OB \cong OC$ *perché sono le semidiagonali;*

$O\hat{F}B \cong O\hat{G}C$ *perché, per costruzione, sono angoli retti;*

$B\hat{O}F \cong C\hat{O}G$ *perché angoli complementari dello stesso angolo* $B\hat{O}G$

Avendo dimostrato che i triangoli OBF e OCG sono congruenti, essi hanno i lati corrispondenti congruenti.

In particolare $OF \cong OG$. *c.v.d.*

Quesito 2

Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari.

Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:

a. **un numero primo**
b. **un numero almeno pari a 3**
c. **un numero al più pari a 3**

Soluzione

La probabilità che esca un numero pari è doppia della probabilità che esca un numero dispari.

Poniamo quindi la probabilità che esca un numero dispari $= p$.

Quindi la probabilità che esca un numero pari è $= 2p$

L'evento certo "Esce un numero pari o un numero dispari" è uguale a 1.

Cioè: $P\ (1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6) = p + 2p + p + 2p + p + 2p = 1$;

Da cui si ottiene: $9p = 1$; $\quad p = \frac{1}{9}$.

a. *I numeri primi da 1 a 6 sono: 2, 3, 5.*

$$P\ (2 \vee 3 \vee 5) \ = \ P\ (2) + P\ (3) + P\ (5) \ = \ \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \ = \ \frac{4}{9}\ .$$

b. *I numeri maggiori o uguali a 3 sono: 3, 4, 5, 6 .*

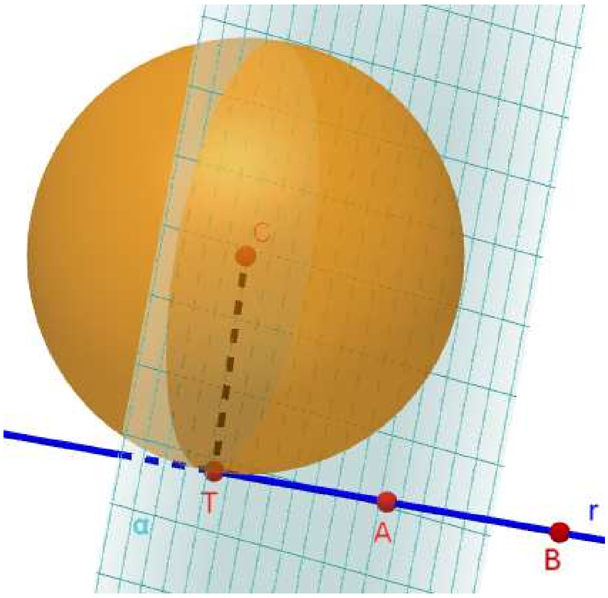
$$P\ (3 \vee 4 \vee 5 \vee 6) \ = \ P\ (3) + P\ (4) + P\ (5) + P\ (6) \ = \ \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \ = \ \frac{6}{9} \ = \ \frac{2}{3}\ .$$

c. *I numeri minori o uguali a 3 sono: 1, 2, 3 .*

$$P\ (1 \vee 2 \vee 3) \ = \ P\ (1) + P\ (2) + P\ (3) \ = \ \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \ = \ \frac{4}{9}\ .$$

Quesito 3

Considerata la retta $\mathbf{r}$ passante per i due punti $\mathbf{A(1\,;\,-2\,;0)}$ e $\mathbf{B(2\,;\,3\,;-1)}$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $\mathbf{C(1\,;\,-6\,;7)}$ e tangente a $\mathbf{r}$.



<u>*Soluzione*</u>

Le componenti del vettore $\vec{v}(a\,;b\,;\,c) = \overrightarrow{AB}$ $\vec{v}(a\,;b\,;\,c) = (x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A)$	$\vec{v}\,(a\,;b\,;c) = (2-1\,;\,3+2\,;\,-1-0) = (1\,;\,5\,;\,-1)$
L'equazione parametrica della retta AB passante per il punto $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ *e di vettore direzione* $\vec{v}\,(a\,;b\,;c)$ *è :* $\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5\,t \\ z = -\,t \end{cases}$

Determiniamo l'equazione del piano α passante per il centro $C(x_C\,;\,y_C\,;\,z_C)$ della circonferenza e perpendicolare alla retta r. Il piano α ha il vettore normale uguale al vettore $\vec{v}$ della retta r.

L'equazione del piano α passante per il punto $C(x_C;y_C;z_C)$ *e di vettore normale* $\vec{v}\,(a\,;b\,;c)$ *è:* $a(x-x_C) + b(y-y_C) + c(z-z_C) = 0$	$1(x-1) + 5(y+6) - 1(z-7) = 0\,;$ $x - 1 + 5y + 30 - z + 7 = 0\,;$ $x + 5y - z + 36 = 0\,;$

Determiniamo il punto di intersezione T fra il piano α e la retta r:

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5\,t \\ z = -\,t \\ x + 5y - z + 36 = 0 \end{cases}$	$1 + t + 5(-2+5t) - (-t) + 36 = 0\,;$ $1 + t - 10 + 25t + t + 36 = 0\,;$ $27t + 27 = 0\,;\qquad t = -1\,.$ $\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -2 + 5\cdot(-1) \\ z = -\,(-1) \end{cases} \qquad T\,(0\,;\,-7\,;1)$

Determiniamo il raggio $\overline{CT}$ della superficie sferica di centro $C(1\,;\,-6\,;7)$ e tangente alla retta r .

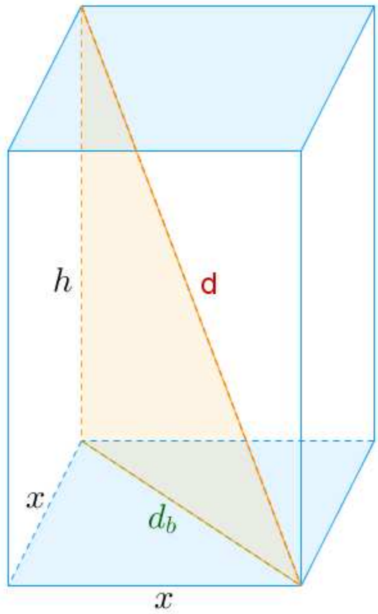
$\overline{CT} = \sqrt{(x_T - x_C)^2 + (y_T - y_C)^2 + (z_T - z_C)^2}$	$\overline{CT} = \sqrt{(0-1)^2 + (-7+6)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{38}\,.$

Determiniamo l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1\,;\,-6\,;7)$ e tangente alla retta r.

L'equazione della superficie sferica di centro $C(x_C\,;\,y_C\,;\,z_C)$ *e raggio* $\overline{CT}$ *è:* $(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 + (z-z_C)^2 = \overline{CT}^{\,2}$	$(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = \left(\sqrt{38}\right)^2\,;$ $x^2 + 1 - 2x + y^2 + 36 + 12y + z^2 + 49 - 14z = 38\,;$ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0\,.$

Quesito 4

Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.



Soluzione

Indichiamo il lato del quadrato di base del parallelepipedo $= \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} > 0$.

L'altezza del parallelepipedo è $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{x^2}}$.

La funzione superficie totale del parallelepipedo è :

$$f(x) = p_B \cdot h + 2 \cdot S_B = 4x \cdot \frac{V}{x^2} + 2x^2 \, ;$$

$$f(x) = 2x^2 + \frac{4V}{x} .$$

Studiamo tale funzione.

La derivata prima è:

$$f^I(x) = 4x - \frac{4V}{x^2}$$

$$\boldsymbol{f^I(x) \geq 0} : \quad \boldsymbol{4x - \frac{4V}{x^2} \geq 0} ; \quad \boldsymbol{\frac{4x^3 - 4V}{x^2} \geq 0} ; \quad \boldsymbol{4x^3 - 4V \geq 0} ; \quad \boldsymbol{x^3 - V \geq 0} ; \quad \boldsymbol{x^3 \geq V} ;$$

$f^I(x) \leq 0$	*La funzione è decrescente per*	$0 < x \leq \sqrt[3]{V}$
$f^I(x) \geq 0$	*La funzione è crescente per*	$x \geq \sqrt[3]{V}$

Il minimo della funzione $\boldsymbol{f(x)}$ *si ha per* $\boldsymbol{x = \sqrt[3]{V}}$.

Pertanto il parallelepipedo di base quadrata di area totale minima è il cubo.

Determiniamo la funzione diagonale del parallelepipedo applicando il teorema di Pitagora.

La diagonale di base del parallelepipedo è: $d_B = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\, x$.

La diagonale del parallelepipedo è: $d = \sqrt{{d_B}^2 + h^2} = \sqrt{2x^2 + \frac{V^2}{x^4}}$.

La funzione diagonale è: $d(x) = \sqrt{2x^2 + \frac{V^2}{x^4}}$.

Conviene studiare i punti di massimo e di minimo della funzione $g(x) = [\, d(x)\,]^2$ *che risultano i medesimi.*

Pertanto studiamo la funzione $\boldsymbol{g(x) = 2x^2 + \frac{V^2}{x^4}}$.

La derivata prima è:

$$g^I(x) = 4x - \frac{4V}{x^5}$$

$$\boldsymbol{g^I(x) \geq 0} : \quad \boldsymbol{4x - \frac{4V}{x^5} \geq 0} ; \quad \boldsymbol{\frac{4x^6 - 4V}{x^5} \geq 0} ;$$

$\boldsymbol{4x^6 - 4V \geq 0}$; $\quad \boldsymbol{x^3 - V \geq 0}$; $\quad \boldsymbol{x^3 \geq V}$.

$x^5 > 0$; $\quad x > 0$.

$f^I(x) \leq 0$	*La funzione è decrescente per*	$0 < x \leq \sqrt[3]{V}$
$f^I(x) \geq 0$	*La funzione è crescente per*	$x \geq \sqrt[3]{V}$

Il minimo della funzione $\boldsymbol{g(x)}$ *si ha per* $\boldsymbol{x = \sqrt[3]{V}}$.

Pertanto il parallelepipedo di base quadrata di diagonale minima è sempre il cubo.

Quesito 5

Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Metodo 1

L'equazione della retta tangente alla curva è data da: $y - y_P = m_t \cdot (x - x_P)$ *dove:*

$$x_P = 3\ ;$$

$$y_P = f(x_P) = f(3) = \sqrt{25 - 3^2} = \sqrt{16} = 4\ ;$$

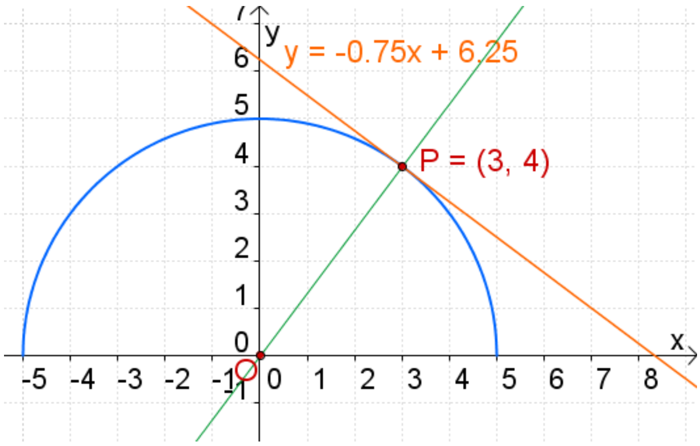
$$m_t = f'(x = 3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

Avendo calcolato precedentemente $f^{I}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$.

Pertanto l'equazione della retta tangente richiesta è:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)\ ; \qquad y - 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\ ; \qquad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

Metodo 2



L'equazione $\boldsymbol{y = \sqrt{25 - x^2}}$ *rappresenta graficamente una semicirconferenza di centro* $\boldsymbol{O(0\,;0)}$ *e raggio* $\boldsymbol{r = 5}$.

Infatti elevando ambo i membri al quadrato si ha:

$$\begin{cases} y^2 = 25 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Il punto di tangenza ha coordinate: $\boldsymbol{P(3\,;4)}$.

Il coefficiente angolare della retta OP è:

$$m_{OP} = \frac{y_P - y_O}{x_P - x_O} = \frac{4 - 0}{3 - 0} = \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \qquad m_t = -\frac{1}{m_{OP}} = -\frac{3}{4}.$$

Pertanto l'equazione della retta tangente richiesta è:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)\ ; \qquad y - 4 = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\ ; \qquad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

Metodo 3

Utilizzando la formula di sdoppiamento si ottiene l'equazione della retta tangente richiesta.

$$x_P \cdot x + y_P \cdot y + a \cdot \frac{x_P + x}{2} + b \cdot \frac{y_P + y}{2} + c = 0\ ;$$

$$3 \cdot x + 4 \cdot y + 0 \cdot \frac{3 + x}{2} + 0 \cdot \frac{4 + y}{2} - 25 = 0\ ;$$

$$3x + 4y - 25 = 0\ .$$

Metodo 4

Si impone la condizione di tangenza $\Delta = \mathbf{0}$, *risolvendo il sistema* $\begin{cases} \boldsymbol{y - 4 = m \cdot (x - 3)} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 - 25 = 0} \end{cases}$

. . .

. . .

Quesito 6

Determinare i valori dei parametri a e b affinché: $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x-(ax^3+bx)}{x^3}=1$

Soluzione 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x-(ax^3+bx)}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right] \quad (forma\ indeterminata)$$

Le funzioni presenti al numeratore e al denominatore soddisfano le ipotesi del Teorema di De L'Hospital.

Infatti sono continue e derivabili in un intorno dello zero (escluso zero), la derivata del denominatore è diversa da zero in un intorno dello zero (escluso zero).

Applichiamo il Teorema di De L'Hospital :

$$=\lim_{x\to 0} \frac{cos\, x-3ax^2-b}{3x^2}=\frac{1-b}{0}=\begin{cases} \infty & se\ \ 1-b\neq 0 \\ \left[\frac{0}{0}\right] & se\ \ 1-b=0 \end{cases}$$

Scartiamo il primo caso $1-b\neq 0$ *perché in questa ipotesi il limite vale infinito (non vale 1 come richiesto).*

Continuiamo il calcolo considerando il secondo caso $1-b=0$ *cioè* $b=1$.

Per $b=1$ *si ha:* $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{cos\, x-3ax^2-1}{3x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Riapplichiamo il Teorema di De L'Hospital :

$$=\lim_{x\to 0} \frac{-sen\, x-6ax}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Riapplichiamo il Teorema di De L'Hospital :

$$=\lim_{x\to 0} \frac{-cos\, x-6a}{6}=\frac{-1-6a}{6}\ .$$

Imponiamo adesso che tale limite valga 1: $\displaystyle \frac{-1-6a}{6}=1$

Si ottiene : $-1-6a=6\,;\qquad -6a=7\,;\qquad a=-\frac{7}{6}$.

Possiamo quindi concludere che : $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x-(ax^3+bx)}{x^3}=1 \qquad se\ \ a=-\frac{7}{6}\ \ e\ \ b=1$.

Soluzione a cura di Giovanni Bellino

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x - (ax^3 + bx)}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \quad (forma\ indeterminata)$$

Con la formula di Taylor approssimiamo la funzione $sen\, x$ *al terzo ordine per confrontarla con la funzione* x^3 *che si trova a denominatore:*	$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x - (ax^3 + bx)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - ax^3 - bx}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\left(\frac{1}{6} + a\right)x^3 + (1-b)x + o(x^3)}{x^3} = \qquad ma \quad \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\left(\frac{1}{6} + a\right)x^3 + (1-b)x}{x^3} =$$

Tale limite è uguale a 1 se: $\begin{cases} 1 - b = 0 \\ -\left(\frac{1}{6} + a\right) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 \\ -\frac{1}{6} - a = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 \\ -1 - 6a = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 \\ 6a = -7 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{7}{6} \end{cases}$

Quesito 7

Si consideri la funzione:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-1+\arctan x & se\ \ x<0\\ ax+b & se\ \ x\geq 0\end{cases}}$$

Determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile.
Stabilire se esiste un intervallo di R in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Soluzione

La funzione, $\forall x\neq 0$, è continua e derivabile perché è formata da funzioni continue e derivabili $\forall x\in R$.

Resta da esaminare il punto $x=0$.

Verifichiamo innanzitutto che la funzione sia continua in $x=0$ (condizione necessaria).

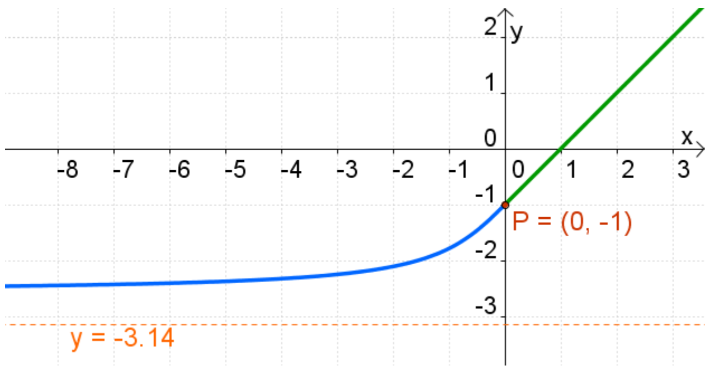
Il limite sinistro della funzione in zero è:	$\lim\limits_{x\to 0^-}(-1+\arctan x)=-1$.
Il limite destro della funzione in zero è:	$\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b)=b$.

I due limiti devono coincidere. Pertanto la funzione è continua se $b=-1$.

La derivata prima della funzione è:	$f^I(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & se\ \ x<0\\ a & se\ \ x>0\end{cases}$
I limite sinistro della derivata in zero è:	$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+x^2}=1$.
I limite destro della derivata in zero è:	$\lim\limits_{x\to 0^+}a=a$.

I due limiti devono coincidere. Pertanto $a=1$.

In definitiva la funzione $f(x)$ è derivabile se: $a=1 \quad \wedge \quad b=-1$.

Si ottiene la funzione $f(x)$ derivabile e continua $\forall x\in R$	$f(x)=\begin{cases}-1+\arctan x & se\ \ x<0\\ x-1 & se\ \ x\geq 0\end{cases}$
Il cui grafico è:	

Tale funzione, essendo strettamente crescente $\forall x\in R$, non può soddisfare la terza ipotesi del teorema di Rolle, cioè non può esistere un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ in cui $f(a)=f(b)$.

Quesito 8

Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$ definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali e distinti.

<u>Soluzione 1</u>

Occorre determinare per quali valori di $a > 0$ il grafico della funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$ interseca l'asse x in tre punti distinti. Pertanto occorre studiare il suo grafico.

Trattandosi di una funzione polinomiale, $f_a(x)$ è definita, continua e derivabile $\forall x \in R$.

$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 5ax + a) = -\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 5ax + a) = +\infty$

Per il teorema di Bolzano (esistenza degli zeri) la funzione ammette almeno uno zero.

$f_a^I(x) = 5x^4 - 5a$

$f_a^I(x) \geq 0$: $\qquad 5x^4 - 5a \geq 0$; $\qquad x^4 - a \geq 0$; $\qquad (x^2 + \sqrt{a})(x^2 - \sqrt{a}) \geq 0$;

Essendo $x^2 + \sqrt{a} \geq 0 \quad \forall x \in R$, *studiamo solo il fattore* $x^2 - \sqrt{a} \geq 0$.

$f_a^I(x) \leq 0$	*La funzione è decrescente per*	$-\sqrt[4]{a} \leq x \leq +\sqrt[4]{a}$
$f_a^I(x) \geq 0$	*La funzione è crescente per*	$x \leq -\sqrt[4]{a} \quad \vee \quad x \geq +\sqrt[4]{a}$

Pertanto:

$\boldsymbol{x = -\sqrt[4]{a}}$ *è un punto di massimo relativo* $\qquad$ $\boldsymbol{f_a(-\sqrt[4]{a}) = a + 4a\sqrt[4]{a}}$

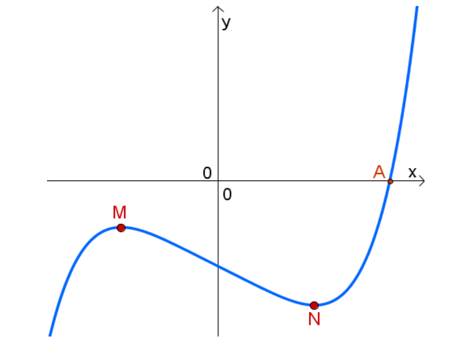
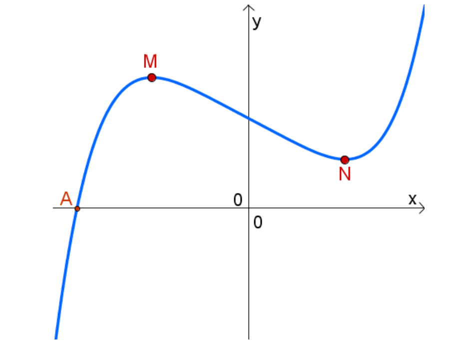
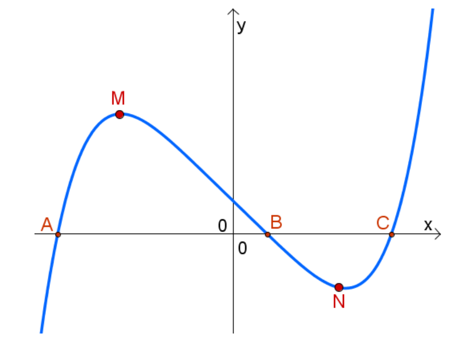
$\boldsymbol{x = +\sqrt[4]{a}}$ *è un punto di minimo relativo* $\qquad$ $\boldsymbol{f_a(+\sqrt[4]{a}) = a - 4a\sqrt[4]{a}}$

Calcoli

$f_a(-\sqrt[4]{a}) = (-\sqrt[4]{a})^5 - 5a(-\sqrt[4]{a}) + a = -\sqrt[4]{a^5} + 5a\sqrt[4]{a} + a = -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a = a + 4a\sqrt[4]{a}$.

$f_a(+\sqrt[4]{a}) = (\sqrt[4]{a})^5 - 5a(\sqrt[4]{a}) + a = \sqrt[4]{a^5} - 5a\sqrt[4]{a} + a = a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a = a - 4a\sqrt[4]{a}$.

La funzione possiede tre zeri reali e distinti quando il massimo e il minimo relativi sono discordi.

		
Il max e il min relativi sono entrambi negativi	*Il max e il min relativi sono entrambi positivi*	*Il max e il min relativi sono discordi*
Un solo zero	*Un solo zero*	*Tre zeri reali e distinti*

Pertanto deve essere: $(a + 4a\sqrt[4]{a}) \cdot (a - 4a\sqrt[4]{a}) < 0$ $\qquad$ *con* $a > 0$.

Essendo $a + 4a\sqrt[4]{a} > 0 \quad \forall a > 0$, *studiamo solo il fattore* $a - 4a\sqrt[4]{a} < 0$.

$a - 4a\sqrt[4]{a} < 0$; $\qquad a \cdot (1 - 4\sqrt[4]{a}) < 0$;

Essendo $a > 0$ *studiamo solo il fattore* $1 - 4\sqrt[4]{a} < 0$;

$1 - 4\sqrt[4]{a} < 0$; $\qquad 4\sqrt[4]{a} > 1$; $\qquad \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4}$; $\qquad a > \left(\frac{1}{4}\right)^4$; $\qquad a > \frac{1}{256}$.

Soluzione a cura di Giovanni Bellino

Isoliamo il parametro a :

$x^5 - 5ax + a = 0$; $\quad x^5 - a \cdot (5x - 1) = 0$; $\quad a \cdot (5x-1) = x^5$; $\quad a = \dfrac{x^5}{5x-1}$

Ponendo $a = y$ *si ottiene il seguente sistema equivalente:* $\begin{cases} y = a \\ y = \frac{x^5}{5x-1} \end{cases}$

Risolviamo questo sistema tracciando i grafici delle due funzioni.

$y = a$ *è l'equazione di un fascio improprio di rette orizzontali.*

$y = \dfrac{x^5}{5x-1}$ *è una funzione razionale fratta il cui dominio è* $D = \left\{ x \in R \quad / \quad x \neq \frac{1}{5} \right\}$

$\lim_{x \to \frac{1}{5}^-} \dfrac{x^5}{5x-1} = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to \frac{1}{5}^+} \dfrac{x^5}{5x-1} = +\infty$

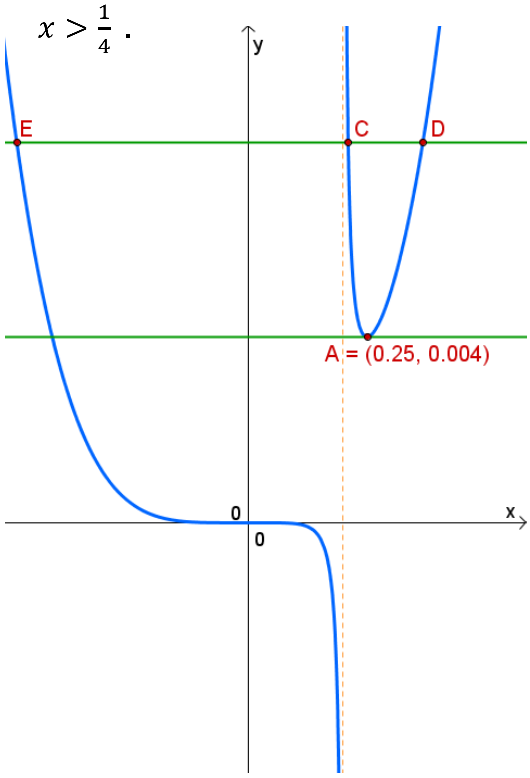
$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^5}{5x-1} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^4}{5 - \frac{1}{x}} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^5}{5x-1} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^4}{5 - \frac{1}{x}} = +\infty$

$$y^I = \frac{5x^4 \cdot (5x-1) - 5 \cdot x^5}{(5x-1)^2} = \frac{25x^5 - 5x^4 - 5x^5}{(5x-1)^2} = \frac{20x^5 - 5x^4}{(5x-1)^2} = \frac{5x^4(4x-1)}{(5x-1)^2}.$$

$y^I = 0 : \quad \dfrac{5x^4(4x-1)}{(5x-1)^2} = 0$; $\quad 5x^4(4x-1) = 0$; $\quad \begin{matrix} 5x^4 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{matrix}$

$y^I > 0 : \quad \frac{5x^4(4x-1)}{(5x-1)^2} > 0$; $\quad 5x^4(4x-1) > 0$; $\quad 4x - 1 > 0$; $\quad x > \frac{1}{4}$.

$y^I < 0 : \quad x < 0 \quad \vee \quad 0 < x < \dfrac{1}{4}$.



Pertanto:

$x = \frac{1}{4}$ *è un punto di minimo relativo per la funzione.*

$x = 0$ *è un punto di flesso a tangente orizzontale.*

Calcoliamo: $\quad f_a\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^5}{5 \cdot \frac{1}{4} - 1} = \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^5}{\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{1}{256}$.

Dall'esame del grafico si ricava che la retta $y = a$

ha tre intersezioni con la funzione $y = \frac{x^5}{5x-1}$ *per* $a > \frac{1}{256}$.