ESAME DI STATO LICEO SCIENTIFICO

Anno scolastico 2022/2023

MATEMATICA

Problema 2

Fissato un parametro reale *a*, con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_a.

a) Al variare del parametro *a*, determinare il dominio di f_a, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

b) Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.

c) Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a. Studiare la funzione $\mathrm{f}_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1}.

d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1}, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

Punto a

Fissato un parametro reale *a*, con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_a.

a) Al variare del parametro *a*, determinare il dominio di f_a, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

Data la funzione parametrica : $\quad f_a(x) = \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - a} \quad con \quad a \neq 0$

Il dominio di $f_a(x)$ *si ottiene ponendo:* $x^2 - a \neq 0$	$D = \begin{cases} x \neq \mp\sqrt{a} & se\ a > 0 \\ \forall x \in R & se\ a < 0 \end{cases}$

$\forall \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$	*La funzione* $f_a(x)$ *ha l'asintoto orizzontale:* $y = 1$. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{a}{x}}{1 - \frac{a}{x^2}} = 1$

$\boldsymbol{a} < 0$	*La funzione* $f_a(x)$ *è definita e continua* $\forall x \in R$ *e non ha asintoti verticali.*	
$\boldsymbol{a} > 0$	$\lim_{x \to -\sqrt{a}} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \left[\frac{a + a\sqrt{a}}{0}\right] = \infty$	$f_a(x)$ *ha l'asintoto verticale:* $x = -\sqrt{a}$. *In* $x = -\sqrt{a}$ *c'è una discontinuità di II specie.*
$\boldsymbol{a} > 0 \ \wedge \ \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{1}$	$\lim_{x \to +\sqrt{a}} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \left[\frac{a - a\sqrt{a}}{0}\right] = \infty$	$f_a(x)$ *ha l'asintoto verticale:* $x = \sqrt{a}$. *In* $x = +\sqrt{a}$ *c'è una discontinuità di II specie.*
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{1}$	$\lim_{x \to +\sqrt{1}} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\sqrt{1}} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$	*In* $x = +1$ *c'è una discontinuità di III specie.*
	$\lim_{x \to -\sqrt{1}} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \left[\frac{1 + 1}{0}\right] = \infty$	$f_a(x)$ *ha l'asintoto verticale:* $x = -1$. *In* $x = -1$ *c'è una discontinuità di II specie.*

Punto b

Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.

Determiniamo i punti di intersezione fra la curva e l'asintoto orizzontale:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - a} \\ y = 1 \end{cases} \qquad con \;\; a \neq 0 \;\; \wedge \;\; a \neq 1$$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - a} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - a = x^2 - ax \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} ax = a \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Il punto di intersezione comune a tutti i grafici di Ω_a *e l'asintoto orizzontale* $y = 1$ *ha coordinate* $A(1\,;1)$.

La retta tangente nell'origine ha equazione: $y - y_O = m_t \cdot (x - x_O)$.

Determiniamo il coefficiente angolare della retta tangente:

$$m_t = f^I(x_O) = f^I(0) = \frac{a(0^2 - 2 \cdot 0 + a)}{(0^2 - a)^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1\,.$$

La retta tangente nell'origine ha quindi equazione: $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)\,;$ $\qquad y = x$.

Siccome l'equazione della retta tangente $y = x$ *non dipende dal parametro* a,

tutte le curve $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$ *condividono la stessa retta tangente nell'origine.*

Calcolo della derivata prima:

$$f^I(x) = \frac{(2x - a) \cdot (x^2 - a) - 2x \cdot (x^2 - ax)}{(x^2 - a)^2} = \frac{2x^3 - 2ax - ax^2 + a^2 - 2x^3 + 2ax^2}{(x^2 - a)^2} =$$

$$= \frac{ax^2 - 2ax + a^2}{(x^2 - a)^2} = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2}\,.$$

Punto c

Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a. Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1}.

Studiamo la monotonia di: $f_a(x) = \dfrac{x^2 - ax}{x^2 - a}$ con $a < 1 \wedge a \neq 0$.

$$f_a^I(x) = \frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2}$$

$$\frac{a(x^2 - 2x + a)}{(x^2 - a)^2} \geq 0 ; \qquad a(x^2 - 2x + a) \geq 0$$

Occorre distinguere due casi:

$a < 0$	$a \cdot (x^2 - 2x + a) \geq 0$ *se* $x^2 - 2x + a \leq 0$	$1 - \sqrt{1-a} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-a}$	*Funzione crescente*
		$x \leq 1 - \sqrt{1-a} \quad \vee \quad x \geq 1 + \sqrt{1-a}$	*Funzione decrescente*

$0 < a < 1$	*la funzione è discontinua in* $x = \mp\sqrt{a}$		
	$a \cdot (x^2 - 2x + a) \geq 0$ *se* $x^2 - 2x + a \geq 0$	$(x \leq 1 - \sqrt{1-a} \quad \vee \quad x \geq 1 + \sqrt{1-a}) \quad \wedge \quad x \neq \mp\sqrt{a}$	*Funzione crescente*
		$(1 - \sqrt{1-a} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-a}) \quad \wedge \quad x \neq \mp\sqrt{a}$	*Funzione decrescente*

Risoluzione dell'equazione:

$x^2 - 2x + a = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 1 - a > 0 \quad \forall a \in R$ *perché* $a < 1$. $\qquad x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1-a}$

Studiamo la funzione: $f_{-1}(x) = \dfrac{x^2 - (-1)x}{x^2 - (-1)}$

Cioè la funzione : $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1}$

La funzione è continua e derivabile $\forall x \in R$.

La funzione interseca l'asse x nei punti: $O(0\,;0)$ *e* $A(-1\,;0)$. *Infatti:*

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x \cdot (x + 1) = 0 \; ; \quad \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \\ y = 0 \end{cases}$$

<u>*Positività:*</u>

$$\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} > 0 ; \qquad x^2 + x > 0 ; \qquad x < -1 \quad \vee \quad x > 0$$

La funzione ha l'asintoto orizzontale $y = 1$. *Infatti:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 .$$

Trattandosi una funzione razionale fratta, la presenza dell'asintoto orizzontale esclude l'asintoto obliquo.
La funzione non ha asintoti verticali.

Crescenza e decrescenza:

Sfruttando quanto già studiato precedentemente

$a < 0$	$f_a^I(x) > 0$	$1-\sqrt{1-a} \le x \le 1+\sqrt{1-a}$	*Funzione crescente*
	$f_a^I(x) < 0$	$x \le 1-\sqrt{1-a} \quad \vee \quad x \ge 1+\sqrt{1-a}$	*Funzione decrescente*

Si ricava:

$a = -1$	$f_a^I(x) > 0$	$1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2}$	*Funzione crescente*	$x = 1-\sqrt{2}$ *minimo relativo*
	$f_a^I(x) < 0$	$x \le 1-\sqrt{2} \quad \vee \quad x \ge 1+\sqrt{2}$	*Funzione decrescente*	$x = 1+\sqrt{2}$ *masimo relativo*

Concavità e convessità:

Abbiamo precedentemente calcolato: $\quad f_a^I(x) = \dfrac{a(x^2-2x+a)}{(x^2-a)^2}$

Pertanto $\quad f_{-1}^I(x) = \dfrac{-(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^2}$

La derivata seconda è:

$$f_{-1}^{II}(x) = \frac{(-2x+2)\cdot(x^2+1)^2 - 2\cdot(x^2+1)\cdot 2x\cdot(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2+1)\cdot[(-2x+2)\cdot(x^2+1) - 4x\cdot(-x^2+2x+1)]}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(-2x+2)\cdot(x^2+1) - 4x\cdot(-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3-2x+2x^2+2+4x^3-8x^2-4x}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{2(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & -3 & +1 \\ -1 & & -1 & +4 & -1 \\ \hline & 1 & -4 & +1 & 0 \end{array}$$

$f_{-1}^{II}(x) > 0\,; \quad \dfrac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3} > 0\,; \quad (x+1)(x^2-4x+1) > 0$

$x+1 > 0$	$x > -1$	
$x^2-4x+1 > 0$	$x < 2-\sqrt{3} \quad \vee \quad x > 2+\sqrt{3}$	

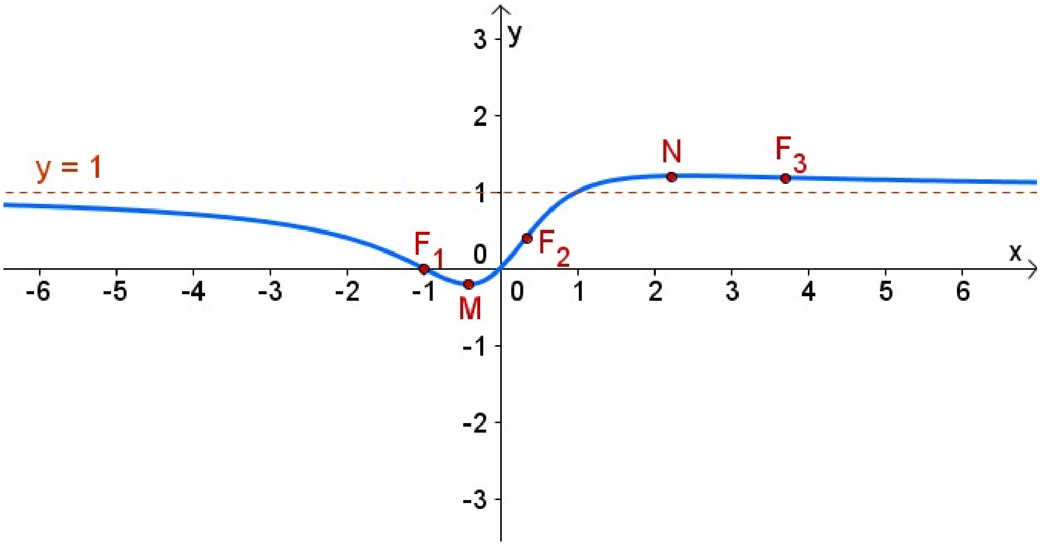
		-1		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
	$-$		$+$		$+$		$+$
	$+$		$+$		$-$		$+$
	$-$		$+$		$-$		$+$

Risoluzione dell'equazione: $x^2-4x+1=0\,; \quad \frac{\Delta}{4} = 4-1 = 3\,; \quad x_1 = 2-\sqrt{3} \quad \wedge \quad x_1 = 2+\sqrt{3}$

La funzione è convessa per	$-1 < x < 2-\sqrt{3} \quad \vee \quad x > 2+\sqrt{3}$
La funzione è concava per	$x < -1 \quad \vee \quad 2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$

La funzione ha tre punti di flesso in $x = -1$, $\quad x = 2-\sqrt{3}$ $\quad$ *e* $\quad x < 2+\sqrt{3}$.

Il grafico della funzione è il seguente:

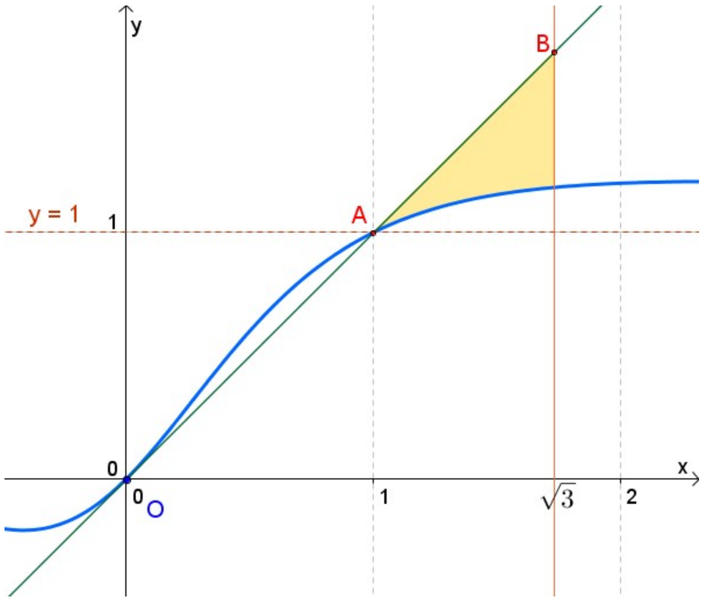


Punto D

Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1}, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

L'equazione della curva Ω_{-1} *è:* $y = \frac{x^2+x}{x^2+1}$

L'equazione della retta tangente nell'origine è: $y = x$



Determiniamo l'area della regione richiesta:

$$S = \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2+x}{x^2+1} \right) dx.$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \left(x - \frac{x^2+x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} \cdot ln(x^2+1) + arctg\, x \right]_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot ln\,(3+1) + arctg\,\sqrt{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} \cdot ln\,2 + arctg\,1 \right) =$$

$$= \frac{3}{2} - \sqrt{3} - \frac{1}{2} ln\,4 + arctg\,\sqrt{3} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} ln\,2 - \frac{\pi}{4} =$$

$$= 2 - \sqrt{3} - ln\,2 + \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} ln\,2 - \frac{\pi}{4} =$$

$$= 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} ln\,2 \cong 0{,}183\,.$$

Calcolo dell'integrale indefinito:

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+x+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = x + \frac{1}{2} \cdot ln(x^2+1) - arctg\,x + c\,.$$