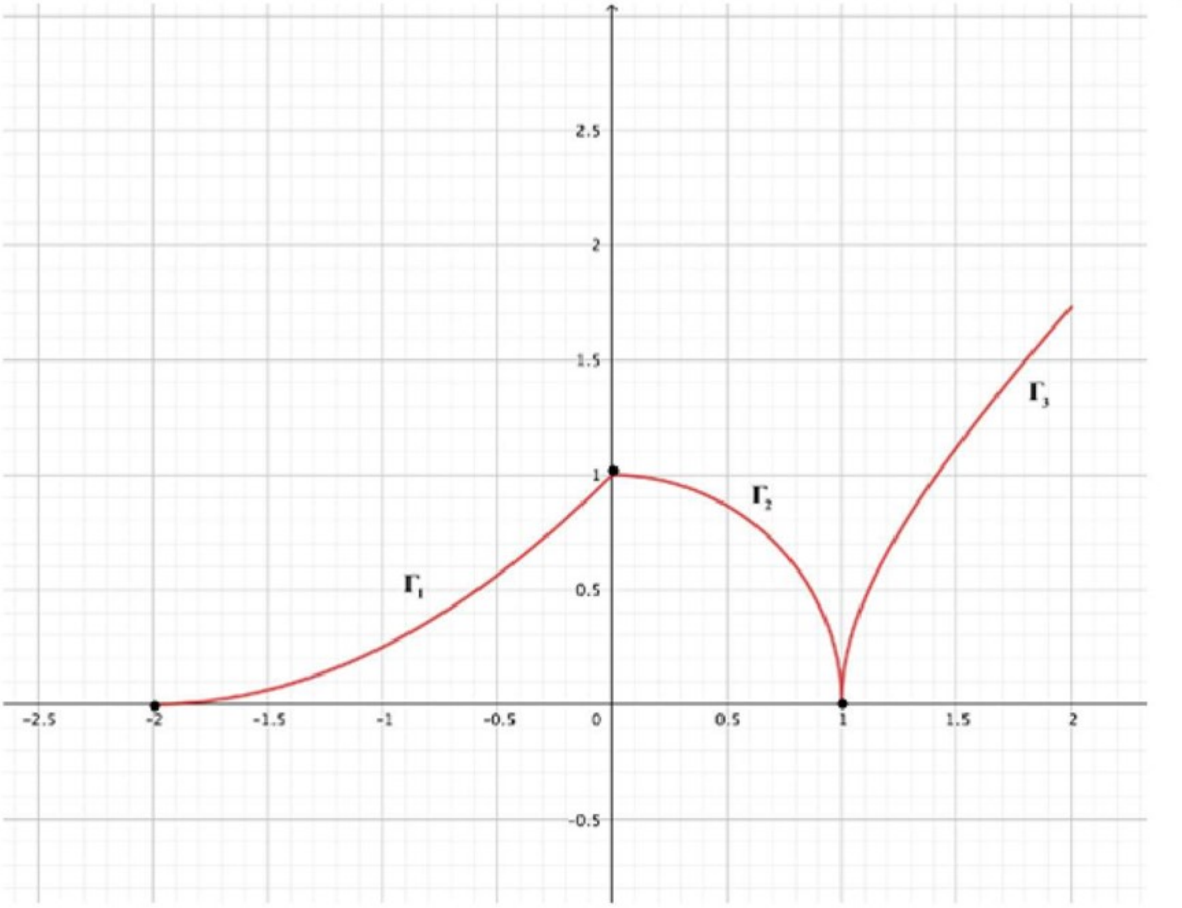
MATEMATICA

Problema 1

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1, dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3.



a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$, utilizzando le equazioni:

$$y = a(x+2)^2 \qquad x^2 + y^2 + b = 0 \qquad x^2 - y^2 + c = 0$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali *a*, *b*, *c*.

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

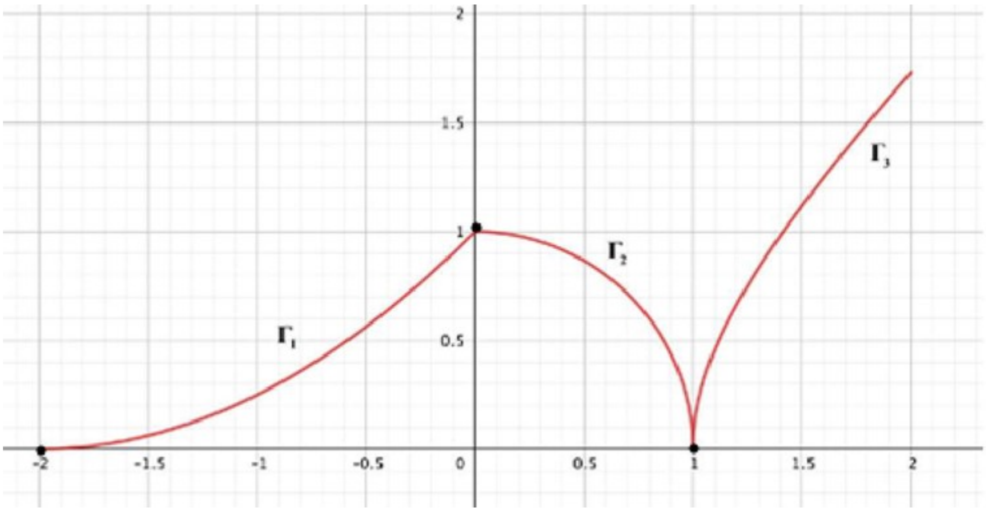
$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

b) A partire dal grafico della funzione f, dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$.

c) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$, definita nell'intervallo $[-2; 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h. Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

Punto a



Γ_1 *è un arco della parabola* $y = a(x+2)^2$.

Imponendo il passaggio per il punto $B(0\,;1)$ *si ha:*

$y = a(x+2)^2\,;\qquad 1 = a(0+2)^2\,;\qquad 1 = 4a\,;\qquad a = \frac{1}{4}.$ *Si ricava:* $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$

Γ_2 *è un arco della circonferenza* $x^2 + y^2 = 1$. *Da cui si ricava:* $y = \sqrt{1-x^2}$

Γ_3 *è un arco dell'iperbole di equazione* $x^2 - y^2 + c = 0$.

Imponendo il passaggio per il punto $C(1\,;0)$ *si ha:* $1^2 - 0^2 + c = 0\,;\qquad c = -1$.

Si ottiene: $x^2 - y^2 - 1 = 0\,;\qquad y^2 = x^2 - 1\,;\qquad y = \sqrt{x^2-1}$

L'espressione analitica della funzione f *definita a tratti nell'intervallo* $[-2\,,2]$ *è :*	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & se\ -2 \le x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & se\ \ 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & se\ \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$
La derivata prima della funzione f *è :*	$f^I(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & se\ -2 \le x < 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & se\ \ 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & se\ \ 1 < x \le 2 \end{cases}$

Calcoli:

$f_1^I(x) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (x+2) \cdot 1 = \frac{x+2}{2}\qquad f_2^I(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\qquad f_3^I(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$

La funzione $f(x)$ *è continua nell'intervallo* $[-2\,,+2[$.

La funzione $f(x)$ *è derivabile negli intervalli* $[-2\,,0[\qquad]0\,,1[\qquad]1\,,2]$.

Verifichiamo la derivabilità di $f(x)$ *nei punti di raccordo:* $x=0 \quad e \quad x=1$.

In $x=0$ *la derivata sinistra della funzione* $f(x)$ *è :*	$f_-^I(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+2}{2} = 1$
In $x=0$ *la derivata destra della funzione* $f(x)$ *è :*	$f_+^I(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

Essendo $f_-^I(0)=1$ *e* $f_+^I(0)=0$, *la funzione* $f(x)$ *non è derivabile in* $x=0$.

In $x=0$ *la funzione* $f(x)$ *ha un punto angoloso.*

La semitangente sinistra ha equazione: $y-1=1\cdot(x-0)\,;\qquad y=x+1$.

La semitangente destra ha equazione: $y-1=0\cdot(x-0)\,;\qquad y=1$.

In $x=1$ *la derivata sinistra della funzione* $f(x)$ *è :*	$f_-^I(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$
In $x=1$ *la derivata destra della funzione* $f(x)$ *è :*	$f_+^I(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

Nel punto $x=1$ *la derivata non esiste.*

In $x=1$ *la funzione* $f(x)$ *ha una cuspide rivolta verso il basso.*

La tangente in $x=1$ *ha equazione* $x=1$.

In $x=-2$ *la derivata destra della funzione* $f(x)$ *è :*	$f_+^I(-2) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{2} = 0^+$

La semitangente destra in $x=-2$ *ha equazione:*

$y-0=0\cdot(x+2)\,;\qquad y=0$.

In $x=+2$ *la derivata sinistra della funzione* $f(x)$ *è :*	$f_-^I(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

La semitangente sinistra in $x=+2$ *ha equazione:*

$$y-\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot(x-2)\,;\qquad y-\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\,;\qquad y=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

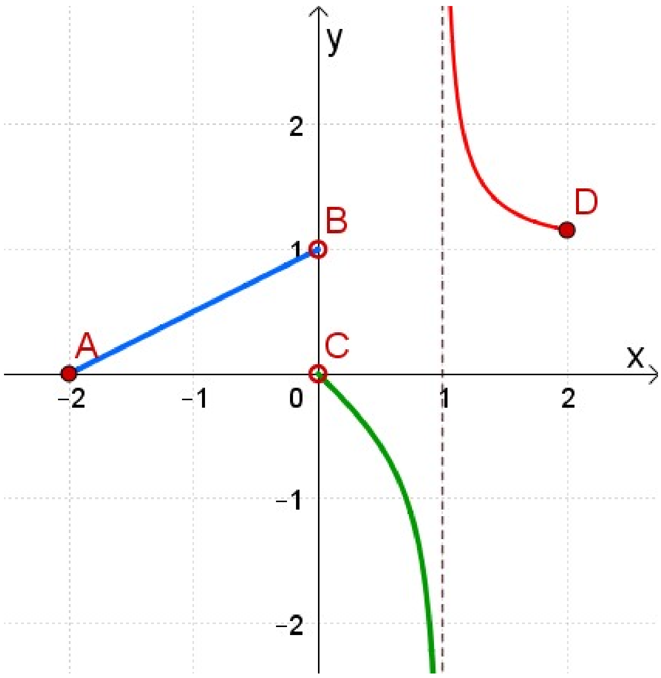
Punto b

A partire dal grafico della funzione $f(x)$, *deduciamo quello della sua derivata* f^I.

Intervallo	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f^I(x)}$	$\boldsymbol{f^{II}(x)}$
$[-2\,,0[$	*Crescente*	*Positiva* *(Retta* $y=\frac{1}{2}x+1$*)*	
$]0\,,1[$	*Decrescente*	*Negativa*	
$]1,2]$	*Crescente*	*Positiva*	
$[-2\,,0[$	*Concavità positiva (convessa)*	*Crescente*	*Positiva*
$]0\,,1[\;\cup\;]1\,,2]$	*Concavità negativa (concava)*	*Decrescente*	*Negativa*

Dallo studio del **punto A** *ricaviamo i seguenti dati:*		
$x=-2$	$f_+^I(-2)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x+2}{2}=0^+$	$A(-2\,;0)$
$x=0$	$f_-^I(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+2}{2}=1$ $\qquad f_+^I(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=0$	$f(x)$ *ha una discontinuità di I specie (salto*$=-1$*)*
$x=1$ *è un asintoto verticale*	$f_-^I(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty$ $\qquad f_+^I(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$	$f(x)$ *ha una discontinuità di II specie.*
$x=2$	$f_-^I(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$D\left(2\,;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Il grafico della funzione $f^I(x)$
è rappresentato a lato.



A partire dal grafico della funzione $f(x)$, *deduciamo la concavità e la convessità della funzione integrale.*

Essendo la funzione $f(x)$ *continua in* $[-2;\ 2]$ *, per il "teorema fondamentale del calcolo integrale", la funzione integrale* $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$ *è continua e derivabile in* $[-2;\ 2]$ *e risulta:* $F^{I}(x) = f(x)$ *(*).*

Per studiare la concavità di F analizziamo la sua derivata seconda $F^{II}(x) = f^{I}(x)$.

Intervallo	$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F^{II}(x) = f^{I}(x)}$	**Concavità di** $\boldsymbol{F^{II}(x)}$
$[-2\,,0[$	*crescente*	*positiva*	*Convessa - Concavità positiva (verso l'alto)*
$]0\,,1[$	*decrescente*	*negativa*	*Concava - Concavità negativa (verso il basso)*
$]1,2]$	*crescente*	*positiva*	*Convessa - Concavità positiva (verso l'alto)*

Punto c

Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$ *, definita nell'intervallo* $[-2\,,0]$ *, di cui* Γ_1 *è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa* h *. Studiare la derivabilità di* h *e tracciarne il grafico.*

Una funzione $f(x)$ *è invertibile in un intervallo* $[a\,,b]$ *se in tale intervallo è biunivoca.*

La funzione $y = \frac{1}{4}(x+2)^2 \;:\; D = [-2\,,0] \;\longrightarrow\; C = [0\,,1]$

è biunivoca perché nell'intervallo $[-2\,,0]$ *è strettamente crescente.*

Determiniamo l'espressione analitica della sua funzione inversa h *.*

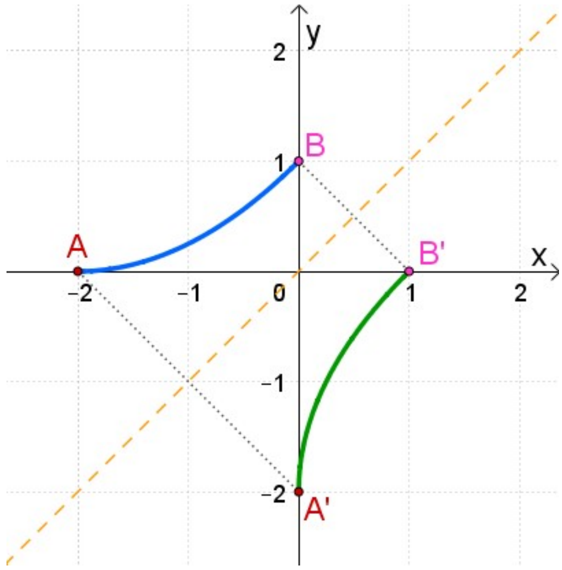
$y = \dfrac{1}{4}(x+2)^2\,;$ $\qquad (x+2)^2 = 4y\,;$ $\qquad x+2 = \mp\sqrt{4y}\,;$

Essendo $x+2 \geq 0$ *si considera:* $\quad x+2 = \sqrt{4y}\,;$ $\qquad x = 2\sqrt{y} - 2\,.$

L'espressione analitica della funzione inversa è:

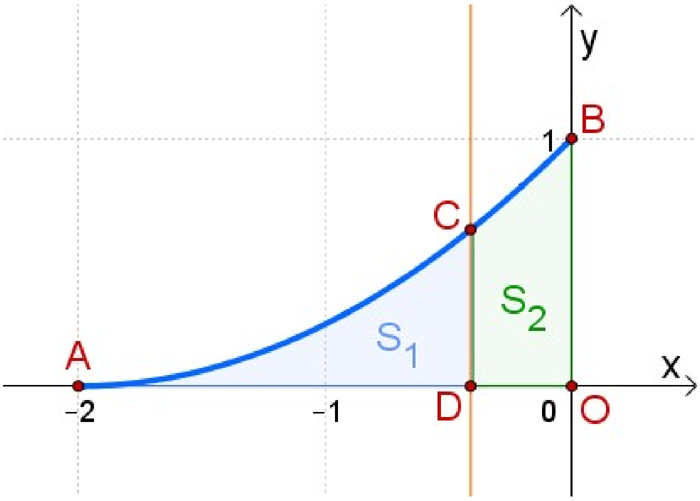
$h = 2\sqrt{x} - 2 \;:\; D = [0\,,1] \;\longrightarrow\; C = [-2\,,0]\,.$

$h^I(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ *La funzione h non è derivabile nel punto* $x = 0$.	*e*	$h^I_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Il grafico della funzione inversa h (in verde) è il simmetrico di Γ_1 *(in azzurro) rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.* *Il grafico è un arco della parabola di equazione* $x = \dfrac{1}{4}(y+2)^2$	

Punto d

Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.



Deve risultare : $S_1 = S_2$;

$$\int_{-2}^{k} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx \; = \; \int_{k}^{0} \frac{1}{4}(x+2)^2 dx \; ;$$

$$\left[\frac{1}{4}\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{k} \; = \; \left[\frac{1}{4}\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{k}^{0} \; ;$$

$$\frac{(k+2)^3}{12} - \frac{(-2+2)^3}{12} \; = \; \frac{(0+2)^3}{12} - \frac{(k+2)^3}{12} \; ;$$

$$(k+2)^3 \; = \; 8 - (k+2)^3 \; ;$$

$$2(k+2)^3 \; = \; 8 \; ; \qquad (k+2)^3 \; = \; 4 \; ; \qquad k+2 = \sqrt[3]{4}\, ; \qquad k = \sqrt[3]{4} - 2\, .$$