ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2019

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: *LI02, EA02 – SCIENTIFICO*
LI03 – SCIENTIFICO – OPZIONE SCIENZE APPLICATE LI15 – SCIENTIFICO – SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

Tema di: MATEMATICA E FISICA

QUESTIONARIO

Quesito 1

Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x)=\frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in R$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $\frac{12}{5}$ e ha come asintoti le rette di equazione $x=3$, $x=-3$ e $y=5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f .

<u>*Soluzione*</u>

Dovendo la curva passare per i punti $A(0\,;\,x_A)$ *e* $B\left(\frac{12}{5}\,;\,x_B\right)$ *ed avere per asintoti le rette di equazioni*

$x=3$, $x=-3$ *e* $y=5$, *la sua equazione è:* $f(x)=\frac{x\cdot(5x-12)}{x^2-9}$ *che si può riscrivere :*

$$f(x)=\frac{5x^2-12x}{x^2-9}\ .$$

$f(x)$ *è una funzione razionale fratta, continua e derivabile nel suo dominio*

$D=\,]-\infty\,,-3[\ \cup\ ]-3\,,3\,[\ \cup\ ]3\,,+\infty[.$

<u>*Derivata prima*</u>

$$f'(x)=\frac{(10x-12)\cdot(x^2-9)-2x(5x^2-12x)}{(x-9)^2}=\frac{10x^3-90x-12x^2+108-10x^3+24x^2}{(x-9)^2}=$$

$$=\frac{12x^2-90x+108}{(x-9)^2}=\frac{6\cdot(2x^2-15x+18)}{(x-9)^2}$$

Il dominio di $f'(x)$ *è ancora* D .

<u>*Segno della derivata prima*</u>

$f'(x)=0\,;\qquad 2x^2-15x+18=0\,;$

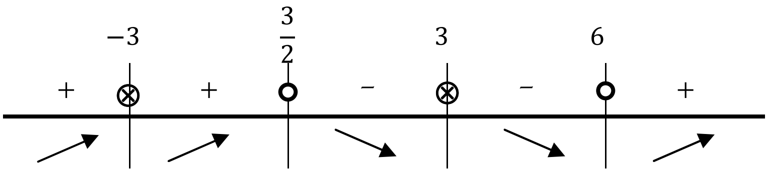
$$\Delta=(-15)^2-4\cdot2\cdot18=225-144=81\,;\qquad x_{1,2}=\frac{15\mp9}{4}=\begin{cases}x_1=\dfrac{15-9}{4}=\dfrac{3}{2}\\[2mm] x_2=\dfrac{15+9}{4}=6\end{cases}$$

$f'(x)>0\,;$

Essendo il denominatore sempre positivo nel dominio della funzione, il segno della frazione è dato dal segno del numeratore. Pertanto:

$2x^2-15x+18>0$

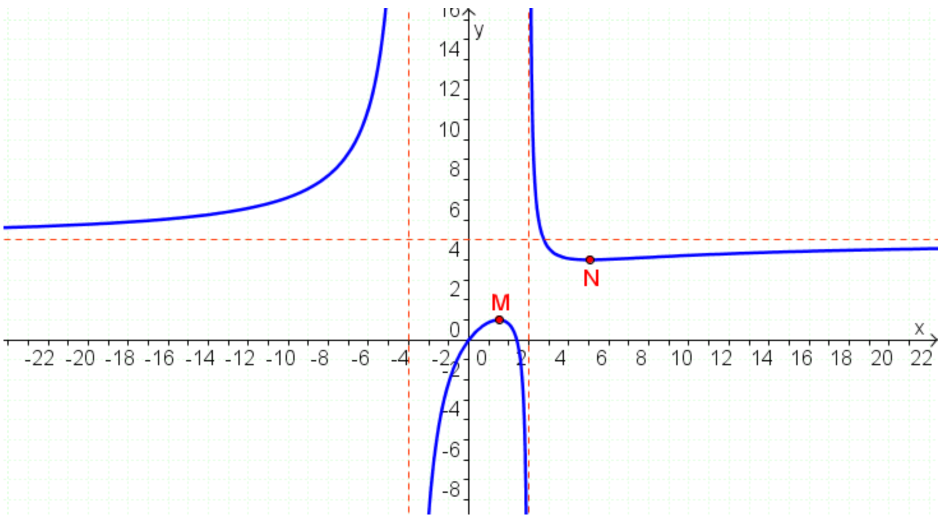
Intervalli di crescenza e di decrescenza



Quindi $f(x)$ *ha un punto di massimo relativo in* $x=\frac{3}{2}$ *e un punto di minimo relativo in* $x=6$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5\left(\frac{3}{2}\right)^2-12\cdot\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-9}=\frac{\frac{45}{4}-18}{\frac{9}{4}-9}=\frac{-\frac{27}{4}}{-\frac{27}{4}}=1\qquad f(6)=\frac{5\cdot6^2-12\cdot6}{6^2-9}=\frac{180-72}{36-9}=\frac{108}{27}=4$$

Il suo grafico è sotto riportato:



Quesito 2

È assegnata la funzione

$$\boldsymbol{g(x) = \sum_{1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \ ...\ + x^{2017} + x^{2019}}$$

Provare che esiste un solo $\boldsymbol{x_0 \in R}$ tale che $\boldsymbol{g(x_0) = 0}$. Determinare inoltre il valore di

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1,1^x}}$$

<u>Soluzione a</u>

$g(x_0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x + x^3 + x^5 + x^7 + \ ...\ + x^{2017} + x^{2019} = 0$;

Raccogliamo a fattor comune totale x :

$x \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ ...\ + x^{2016} + x^{2018}) = 0$;

per la legge dell'annullamento del prodotto si ha:

$x \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ ...\ + x^{2016} + x^{2018}) = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ ...\ + x^{2016} + x^{2018} = 0 \end{array}\right.$

La seconda equazione di 2018° grado non ha soluzioni, perché somma di quantità positive o nulle.

Pertanto esiste una unica soluzione $x_0 = 0$ *tale che* $g(x_0) = 0$.

<u>Soluzione b</u>

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + x^3 + x^5 + x^7 + \ ...\ + x^{2017} + x^{2019}}{1,1^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019} \cdot \left(\frac{1}{x^{2018}} + \frac{1}{x^{2016}} + \frac{1}{x^{2014}} + \frac{1}{x^{2012}} + \ ...\ + \frac{1}{x^2} + 1\right)}{1,1^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{1,1^x} =$$ *perché* $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^{2018}} + \frac{1}{x^{2016}} + \frac{1}{x^{2014}} + \frac{1}{x^{2012}} + \ ...\ + \frac{1}{x^2} + 1\right) = 1$

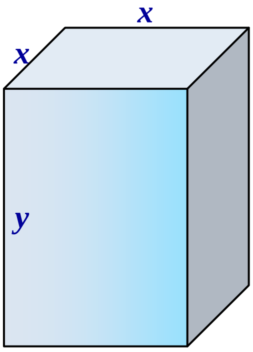
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2019}}{1,1^x} = 0 .$$ *Perché* x^{2019} *è un infinito di ordine inferiore a* $1,1^x$

Oppure

applicando il Teorema di De L'Hospital 2019 volte, a numeratore rimane una costante mentre a denominatore permane l'esponenziale con altri 2019 fattori.

Quesito 3

Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.



<u>Soluzione</u>

Indichiamo con $x > 0$ la misura del lato del quadrato di base e con $y > 0$ dell'altezza del parallelepipedo.

Dalla relazione $S_T = S$ si ottiene:

$$S_{Laterale} + 2S_{Base} = S \, ; \qquad 4xy + 2x^2 = S \; .$$

Da quest'ultima ricaviamo la variabile y:

$$y = \frac{S - 2x^2}{4x}$$

Ricaviamo quindi, la funzione somma degli spigoli:

$$f(x) = 8x + 4 \cdot \frac{S - 2x^2}{4x} \; ; \qquad f(x) = \frac{8x^2 + S - 2x^2}{x} \; ;$$

$$f(x) = \frac{6x^2 + S}{x} \; ;$$

$f(x)$ è una funzione razionale fratta, il cui dominio è : $D = (-\infty \, , \; 0) \cup (0 \, , +\infty)$.

Nel nostro caso il dominio è ristretto all'intervallo $D^R = (0 \, , +\infty)$.

<u>Derivata prima</u>

$$f'(x) = \frac{12x \cdot x - 1 \cdot (6x^2 + S)}{x^2} = \frac{12x^2 - 6x^2 - S}{x^2} = \frac{6x^2 - S}{x^2} =$$

<u>Segno della derivata prima</u>

$$f'(x) = 0 \, ; \qquad 6x^2 - S = 0 \, ; \qquad x_{1,2} = \mp \sqrt{\frac{S}{6}}$$

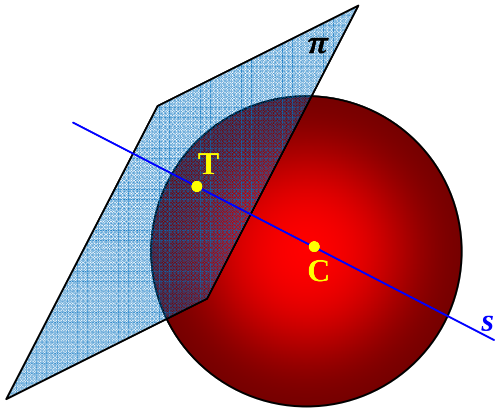
$$f'(x) > 0 \, ;$$

Essendo il denominatore sempre positivo nel dominio della funzione, il segno della frazione è dato dal segno del numeratore. Pertanto:

	$-\sqrt{\frac{S}{6}}$		0		$+\sqrt{\frac{S}{6}}$	
$6x^2 - S > 0$	$+$ ⊗	$-$	o	$-$	⊗	$+$ o
Intervalli di crescenza e di decrescenza	NO D^R	NO D^R		↘		↗

Quindi il parallelepipedo rettangolo a base quadrata avente la somma delle lunghezze degli spigoli minima si ha per $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$.

Quesito 4



Dati i punti $A(2\,;0\,;\,-1)$ e $B(-2\,;2\,;\,1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA}=\sqrt{2}\cdot\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana.

Verificare che il punto $T(-10\,;8\,;7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

<u>*Soluzione*</u>

$A(2\,;0\,;\,-1) \qquad B(-2\,;2\,;\,1) \qquad P(x\,;\,y)$

$\overline{PA}=\sqrt{2}\cdot\overline{PB}\,;$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2+(z+1)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\,;$

$(x-2)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=2\cdot[(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2]\,;$

$x^2+4-4x+y^2+z^2+1+2z=2\cdot[x^2+4+4x+y^2+4-4y+z^2+1-2z]\,;$

$x^2+4-4x+y^2+z^2+1+2z=2x^2+8+8x+2y^2+8-8y+2z^2+2-4z\,;$

$-x^2-y^2-z^2-12x+8y+6z-13=0\,;$

$x^2+y^2+z^2+12x-8y-6z+13=0\,;$

Tale equazione rappresenta l'equazione di una sfera : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

se: $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d\geq 0\,.$

$\frac{12^2}{4}+\frac{(-8)^2}{4}+\frac{(-6)^2}{4}-13\geq 0\,; \qquad \frac{144}{4}+\frac{64}{4}+\frac{36}{4}-13\geq 0\,; \qquad \frac{144+64+36-72}{4}\geq 0\,;$

$\frac{144-64+36-52}{4}\geq 0\,; \qquad \frac{192}{4}\geq 0\,; \qquad 48\geq 0\,.$

Si tratta quindi di una sfera di centro $C\left(-\frac{a}{2}\,;-\frac{b}{2}\,;\,-\frac{c}{2}\right)=\left(-\frac{12}{2}\,;-\frac{-8}{2}\,;\,-\frac{-6}{2}\right)=\left(-6\,;\,4\,;\,3\right).$

Il punto $T(-10\,;8\,;7)$ *appartiene alla sfera. Infatti le sue coordinate soddisfano la sua equazione:*

$(-10)^2+8^2+7^2+12\cdot(-10)-8\cdot 8-6\cdot 7+13=0\,;$

$100+64+49+120-64-42+13=0\,; \qquad\qquad 0=0\,.$

Il piano tangente passa per il punto $T(-10\,;8\,;7)$ *e ha vettore normale* $\overrightarrow{TC}$.

$\overrightarrow{TC}\,(\bar{x}\,;\,\bar{y}\,;\,\bar{z})=\,(x_C-x_T\,;\,y_C-y_T\,;\,z_C-z_T)=(-6+10\,;\,4-8\,;\,3-7)=(4\,;\,-4\,;\,-4)\,.$

L'equazione del piano tangente è :

$\bar{x}\cdot(x-x_T)+\bar{y}\cdot(y-y_T)+\bar{z}\cdot(z-z_T)=0\,;$

$4\cdot(x+10)-4\cdot(y-8)-4\cdot(z-7)=0\,;$

$4x+40-4y+32-4z+28=0\,;$

$4x-4y-4z+100=0\,;$

$x-y-z+25=0\,.$

Quesito 5

Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.

A. Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
B. Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
C. Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

Soluzione A

I casi favorevoli sono 5 : $(1;1;1;1)$ $(1;1;1;2)$ $(1;1;2;1)$ $(1;2;1;1)$ $(2;1;1;1)$	$\Rightarrow$	$P(A)=\frac{5}{6^4}$

Soluzione B

Consideriamo l'evento contrario $\bar{B}$: "*il prodotto dei* 4 *numeri usciti non sia multiplo di* 3"

L'evento contrario $\bar{B}$ *equivale a dire che nel lancio non escono numeri multipli di 3, cioè che escono i numeri 1 , 2 , 4 , 5 .*

Pertanto : $P(\bar{B})=\frac{4^4}{6^4}$.

In definitiva, la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3 è :

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{4^4}{6^4}=\frac{1296-256}{1296}=\frac{1040}{1296}=\frac{65}{81}$$

Soluzione C – metodo 1

La probabilità dell'evento C è la somma delle probabilità dei seguenti eventi incompatibili:

E_1 *: "Escono tutti 4"*	$P(E_1)=\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{1296}$
E_2 *: "Escono tre 4 e un numero minore di 4"*	$P(E_2)=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^1=4\cdot\frac{3}{1296}=\frac{12}{1296}$
E_3 *: "Escono due 4 e due numeri minori di 4"*	$P(E_3)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{3^2}{1296}=6\cdot\frac{9}{1296}=\frac{54}{1296}$
E_4 *: "Escono un 4 e tre numeri minori di 4"*	$P(E_4)=\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3^3}{1296}=4\cdot\frac{27}{1296}=\frac{108}{1296}$

$$P(E)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+P(E_4)=\frac{1}{1296}+\frac{12}{1296}+\frac{54}{1296}+\frac{108}{1296}=\frac{175}{1296}\ .$$

Soluzione C – metodo 2

I casi favorevoli sono dati dalle quaterne evidenziate in blu:

Quaterne che iniziano per 1				Quaterne che iniziano per 2			
(1,1,1,1)	(1,2,1,1)	(1,3,1,1)	(1,4,1,1)	(2,1,1,1)			
(1,1,1,2)	(1,2,1,2)	(1,3,1,2)	(1,4,1,2)	(2,1,1,2)			
(1,1,1,3)	(1,2,1,3)	(1,3,1,3)	(1,4,1,3)	(2,1,1,3)			
(1,1,1,4)	(1,2,1,4)	(1,3,1,4)	(1,4,1,4)	(2,1,1,4)			
(1,1,2,1)	(1,2,2,1)	(1,3,2,1)	(1,4,2,1)				
(1,1,2,2)	(1,2,2,2)	(1,3,2,2)	(1,4,2,2)				
(1,1,2,3)	(1,2,2,3)	(1,3,2,3)	(1,4,2,3)				
(1,1,2,4)	(1,2,2,4)	(1,3,2,4)	(1,4,2,4)				
(1,1,3,1)	(1,2,3,1)	(1,3,3,1)	(1,4,3,1)				
(1,1,3,2)	(1,2,3,2)	(1,3,3,2)	(1,4,3,2)				
(1,1,3,3)	(1,2,3,3)	(1,3,3,3)	(1,4,3,3)				
(1,1,3,4)	(1,2,3,4)	(1,3,3,4)	(1,4,3,4)				
(1,1,4,1)	(1,2,4,1)	(1,3,4,1)	(1,4,4,1)				
(1,1,4,2)	(1,2,4,2)	(1,3,4,2)	(1,4,4,2)				
(1,1,4,3)	(1,2,4,3)	(1,3,4,3)	(1,4,4,3)				
(1,1,4,4)	(1,2,4,4)	(1,3,4,4)	(1,4,4,4)				

Quaterne che iniziano per 3				Quaterne che iniziano per 4			
(3,1,1,1)				(4,1,1,1)			
(3,1,1,2)				(4,1,1,2)			
(3,1,1,3)				(4,1,1,3)			
(3,1,1,4)				(4,1,1,4)			
. . .				. . .			

Dall'esame delle quaterne appare evidente che il numero dei casi favorevoli dell'evento richiesto è dato:

dal numero delle quaterne formate con le cifre 1 , 2 , 3 , 4 diminuito del numero delle quaterne formate dalle cifre 1 , 2 , 3.

Pertanto, $$P(E) = \frac{4^4}{6^4} - \frac{3^4}{6^4} = \frac{256-81}{1256} = \frac{175}{1256}.$$

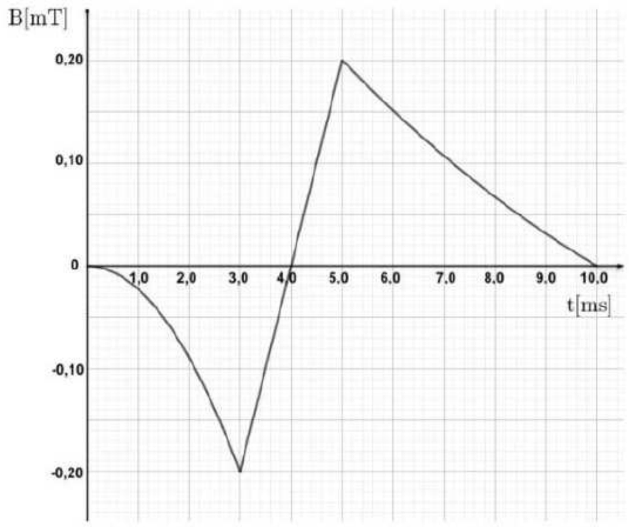
Quesito 6

Una spira di rame, di resistenza $R = 4{,}0\ \mathrm{m}\Omega$, racchiude un'area di $30\ \mathrm{cm}^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

a) da 0,0 ms a 3,0 ms;

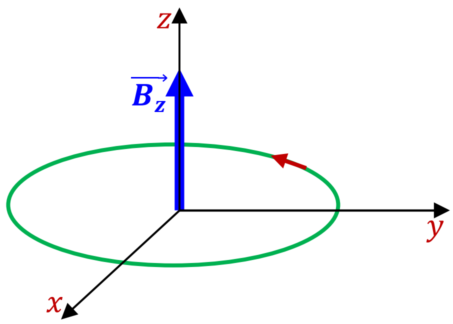
b) da 3,0 ms a 5,0 ms;

c) da 5,0 ms a 10 ms.



<u>Soluzione</u>

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano xyz e supponiamo che la spira giaccia sul piano xy, il campo magnetico $\vec{B}$ essendo perpendicolare alla spira è diretto lungo l'asse z. Supponiamo inoltre che il verso del campo magnetico $\vec{B}$ sia diretto verso l'alto (semiasse positivo dell'asse z).

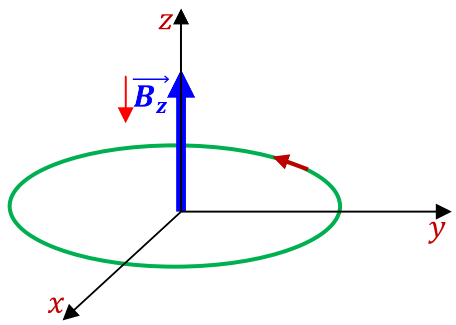
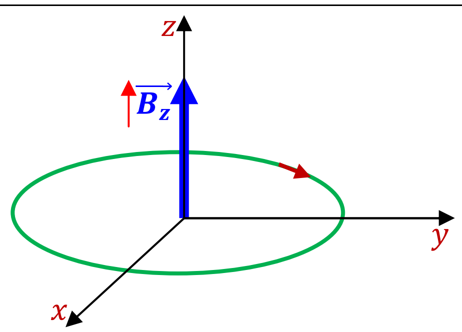


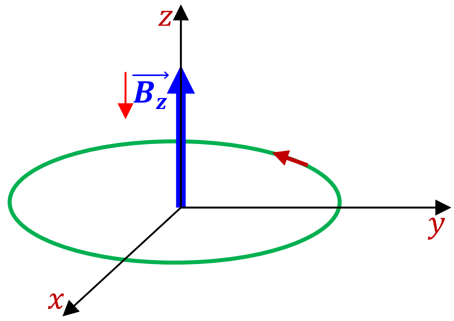
Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz,

la variazione del flusso nel tempo provoca una corrente indotta nella spira, la cui intensità media è

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\,\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

Il segno meno è il contenuto della Legge Lenz, per cui la corrente indotta ha verso da opporsi alla variazione di flusso del campo magnetico $\vec{\mathrm{B}}$ che l'ha provocato.

Intervallo di tempo	***B***	***Corrente indotta***	
$0{,}0\ ms < t < 3{,}0\ ms$	*diminuisce*	*La corrente indotta i_1 genera un campo magnetico opposto al campo magnetico $\vec{B}_z$.* *Il verso di i_1 è antiorario.*	
$3{,}0\ ms < t < 5{,}0\ ms$	*aumenta*	*La corrente indotta i_1 genera un campo magnetico opposto al campo magnetico $\vec{B}_z$.* *Il verso di i_2 è orario.*	

$5{,}0ms < t < 10{,}0ms$	*diminuisce*	*La corrente indotta* i_1 *genera un campo magnetico opposto al campo magnetico* $\vec{B}_z$. *Il verso di* i_3 *è antiorario.*	

Calcoliamo la corrente indotta media nei tre casi richiesti.

Intervallo di tempo	***Variazione del flusso***	***Corrente indotta***
$0{,}0\ ms < t < 3{,}0\ ms$	$\Delta\,\Phi(\vec{B}) = S\ \Delta B_z =$ $= (3{,}0 \cdot 10^{-3}\ m^2)(-2{,}0 - 0{,}0) \cdot 10^{-4} T$ $= -6 \cdot 10^{-7}\ Wb$.	$i_1 = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\,\Phi(\vec{B})}{\Delta t} =$ $= -\frac{1}{4{,}0 \cdot 10^{-3}\ \Omega}\frac{-6{,}0 \cdot 10^{-7}\ Wb}{3{,}0 \cdot 10^{-3}\ s} = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ A$
$3{,}0\ ms < t < 5{,}0\ ms$	$\Delta\,\Phi(\vec{B}) = S\ \Delta B_z =$ $= (3{,}0 \cdot 10^{-3}\ m^2)(2{,}0 + 2{,}0) \cdot 10^{-4} T =$ $= +1{,}2 \cdot 10^{-6}\ Wb$.	$i_2 = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\,\Phi(\vec{B})}{\Delta t} =$ $= -\frac{1}{4{,}0 \cdot 10^{-3}\ \Omega}\frac{1{,}2 \cdot 10^{-6}\ Wb}{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ s} = -0{,}15\ A$
$5{,}0ms < t < 10{,}0ms$	$\Delta\,\Phi(\vec{B}) = S\ \Delta B_z =$ $= (3{,}0 \cdot 10^{-3}\ m^2)(0{,}0 - 2{,}0) \cdot 10^{-4} T =$ $= -6 \cdot 10^{-7}\ Wb$.	$i_3 = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\,\Phi(\vec{B})}{\Delta t} =$ $= -\frac{1}{4{,}0 \cdot 10^{-3}\ \Omega}\frac{-6 \cdot 10^{-7}\ Wb}{5{,}0 \cdot 10^{-3}\ s} = 3{,}0 \cdot 10^{-2}\ A$

Quesito 7

In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0{,}80\, c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

Soluzione

Indichiamo con v_m la velocità media della particella nel sistema di riferimento del laboratorio.
Indichiamo con v'_m la velocità media della particella nel sistema di riferimento della navicella.
Nel sistema di riferimento del laboratorio, la velocità media della particella è :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-1}\, m}{2{,}0 \cdot 10^{-9}\, s} = 1{,}25 \cdot 10^{8} \frac{m}{s} = 1{,}25 \cdot 10^{8}\ m/s \cdot \frac{c}{3{,}0 \cdot 10^{8}\, m/s} = \frac{\frac{125}{100}}{3} c = \frac{125}{300} c = \frac{5}{12} c\,.$$

Nel sistema di riferimento della navicella la velocità media è :

$$v'_m = \frac{v_m - v}{1 - \frac{v_m v}{c^2}} = \frac{\frac{5}{12} c - \frac{4}{5} c}{1 - \frac{\frac{5}{12} c \cdot \frac{4}{5} c}{c^2}} = \frac{-\frac{23}{60} c}{1 - \frac{\frac{20}{60} c^2}{c^2}} = \frac{-\frac{23}{60} c}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{23}{60} c \cdot \frac{3}{2} = -\frac{23}{40} c =$$

$$= -\frac{23}{40} \cdot 3{,}0 \cdot 10^{8}\, m/s = -1{,}725 \cdot 10^{8}\, m/s\,.$$

In questo sistema di riferimento la particella si muove in verso opposto rispetto all'asse positivo delle x.

Per calcolare il tempo misurato da un osservatore posto sulla navicella determiniamo il coefficiente di dilatazione per passare dal sistema di riferimento del laboratorio al sistema di riferimento della navicella

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}\,.$$

Applicando le trasformazioni di Lorentz si ottiene:

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{5}{3}(2{,}5 \cdot 10^{-1}\, m - 0{,}80\, c \cdot 2 \cdot 10^{-9} s) = \frac{5}{3}(2{,}5 \cdot 10^{-1}\, m - 0{,}80 \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s \cdot 2 \cdot 10^{-9} s)$$

$$= \frac{5}{3}(2{,}5 \cdot 10^{-1}\, m - 4{,}8 \cdot 10^{-1}\, m) = \frac{5}{3}(2{,}5 \cdot 10^{-1}\, m - 4{,}8 \cdot 10^{-1}\, m) = -3{,}83 \cdot 10^{-1}\, m$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) = \frac{5}{3}\left(2 \cdot 10^{-9}\, s - \frac{0{,}80\, c}{c^2} \cdot 0{,}25\, m\right) = \frac{5}{3}\left(2 \cdot 10^{-9}\, s - \frac{0{,}80}{3 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}} \cdot 0{,}25\, m\right) =$$

$$= \frac{5}{3}(2 \cdot 10^{-9}\, s - 0{,}67 \cdot 10^{-9}\, s) = 2{,}2 \cdot 10^{-9}\, s\,.$$

Pertanto un osservatore posto sulla navicella misura:

una distanza $|\Delta x'| = 0{,}38\, m$

e un tempo $|\Delta t'| = 2{,}2 \cdot 10^{-9}\, s$.

Quesito 8

. Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1{,}00$ mT. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38{,}1$ cm, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10{,}5$ cm e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg
velocità della luce	c	$2{,}998 \cdot 10^{8}$ m/s

<u>*Soluzione*</u>

Una particella di massa m e carica q che si muove con velocità $\vec{v}$ in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}$ subisce una forza magnetica $\vec{F}_B = q\,\vec{v} \times \vec{B}$, detta forza di Lorentz.

Tale forza ha direzione perpendicolare sia al campo magnetico, sia alla velocità.

Se il campo magnetico è uniforme e la velocità iniziale della particella forma con il campo magnetico un angolo α $(0 < \alpha < 90°)$ il moto si scompone:

in un componente uniforme $v_\parallel = v\cos\alpha$ (dovuta alla componente della velocità parallela al campo);

in un componente circolare $v_\perp = v\sin\alpha$ (dovuta alla componente della velocità perpendicolare al campo).

La traiettoria risultante è elicoidale, con raggio $r = \dfrac{m\,v_\perp}{q\,B}$ *e passo* $\Delta x = v_\parallel T$ $\quad \Delta x = v_\parallel \dfrac{2\pi\,m}{q\,B}$.

Pertanto, dalla formula $r = \frac{m\,v_\perp}{qB}$ *, ricaviamo la componente perpendicolare della velocità della particella:*

$$v_\perp = \frac{rqB}{m} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-1}\,m \,\cdot\, 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C \,\cdot\, 1{,}00 \cdot 10^{-3} T}{1{,}673 \cdot 10^{-27}\,kg} = 1{,}005 \cdot 10^{4}\,m/s\,.$$

Ricaviamo poi il periodo T del moto circolare uniforme:

$$T = \frac{2\pi\,r}{v_\perp} = \frac{2\pi \,\cdot\, 1{,}05 \cdot 10^{-1}\,m}{1{,}005 \cdot 10^{4}\,m/s} = 6{,}56 \cdot 10^{-5}\,s\,.$$

Dalla formula $\Delta x = v_\parallel T$, ricaviamo la componente parallela della velocità della particella:

$$v_\parallel = \frac{\Delta x}{T} = \frac{3{,}81 \cdot 10^{-1}\,m}{6{,}56 \cdot 10^{-5}\,s} = 5{,}81 \cdot 10^{3}\,m/s\,.$$

Calcoliamo quindi, il modulo del vettore velocità:

$$v = \sqrt{{v_\perp}^2 + {v_\parallel}^2} = \sqrt{\left(1{,}005 \cdot 10^4 \frac{m}{s}\right)^2 + \left(0{,}581 \cdot 10^4 \frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1{,}01 \cdot 10^8 \, + 0{,}3376 \cdot 10^8)\,m^2}{s^2}} =$$

$$= \sqrt{(1{,}35 \cdot 10^8)\,m^2/s^2} \; = \; 1{,}16 \cdot 10^4\,m/s\,.$$

Dalla formula $v_\parallel = v\cos\alpha$, ricaviamo l'angolo che il vettore velocità forma con il campo magnetico $\vec{B}$:

$$\cos\alpha = \frac{v_\parallel}{v}\,; \qquad \alpha = \arccos\frac{v_\parallel}{v} = \arccos\left(\frac{5{,}81 \cdot 10^3\,m/s}{11{,}6 \cdot 10^3\,m/s}\right) = \arccos 0{,}5 \cong 60°\,.$$