Sessione ordinaria 2019
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO
(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad\qquad g(x) = (ax + b)\, e^{2x-x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.

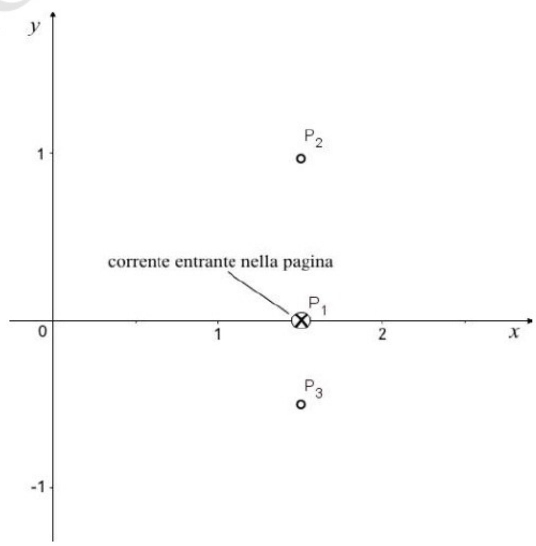
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

  $P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

  I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2{,}0$ A, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

  Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.



- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0{,}20\ \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω.

Punto 1

$g(x) = (ax + b) \cdot e^{2x - x^2} \qquad a \neq 0$

<u>*Dominio e Continuità*</u>

La funzione è definita, continua e derivabile $\forall\, x \in R \quad \wedge \quad \forall a \neq 0$.

<u>*Intersezione con gli assi*</u>

Interseca gli assi cartesiani nei punti $A\,(0\,;b)$ *e* $B\,\left(-\frac{b}{a}\,;0\right)$.

$$\begin{cases} g(x) = (ax + b) \cdot e^{2x - x^2} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = b \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad A\,(0\,;b)$$

$$\begin{cases} g(x) = (ax + b) \cdot e^{2x - x^2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (ax + b) \cdot e^{2x - x^2} = 0 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} (ax + b) = 0 \\ - \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad B\,\left(-\frac{b}{a}\,;0\right)$$

<u>*Limiti e asintoti*</u>

$$\lim_{x \to \mp\infty} (ax + b) \cdot e^{2x - x^2} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}} = \frac{\infty}{\infty} = ? \quad \textit{Forma indeterminata} .$$

Applicando il Teorema di De L'Hospital si ha:

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{ax + b}{e^{x^2 - 2x}} \quad \overline{\overline{H}} \quad \lim_{x \to \mp\infty} \frac{a}{(2x - 2) \cdot e^{x^2 - 2x}} = 0 .$$

L'asse delle x è un asintoto orizzontale della funzione $g(x)$.

<u>*Derivata prima*</u>

$$g'(x) = a \cdot e^{2x - x^2} + (ax + b) \cdot (2 - 2x) \cdot e^{2x - x^2} = [a + (ax + b) \cdot (2 - 2x)] \cdot e^{2x - x^2} =$$

$$= [a + 2ax - 2ax^2 + 2b - 2bx] \cdot e^{2x - x^2} = [-2ax^2 + 2ax - 2bx + a + 2b] \cdot e^{2x - x^2} =$$

$$= [-2ax^2 + 2(a - b)x + a + 2b] \cdot e^{2x - x^2} .$$

$$g'(x) = 0\,; \qquad -2ax^2 + 2(a - b)x + a + 2b = 0\,; \qquad 2ax^2 - 2(a - b)x - a - 2b = 0\,;$$

$$\frac{\Delta}{4} = [-(a - b)]^2 - 2a \cdot (-a - 2b) = a^2 + b^2 - 2ab + 2a^2 + 4ab = a^2 + b^2 + 2ab + 2a^2 =$$

$$= (a + b)^2 + 2a^2$$

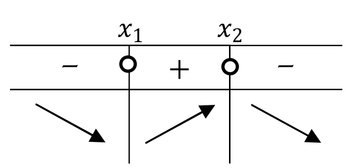
Essendo $a \neq 0 \qquad \frac{\Delta}{4} > 0 \quad \forall b \in R$.

$$x_{1,2} = \frac{a - b \mp \sqrt{(a + b)^2 + 2a^2}}{2a} = \begin{array}{l} = \dfrac{a - b - \sqrt{(a + b)^2 + 2a^2}}{2a} \\ = \dfrac{a - b + \sqrt{(a + b)^2 + 2a^2}}{2a} \end{array}$$

$g'(x) > 0$

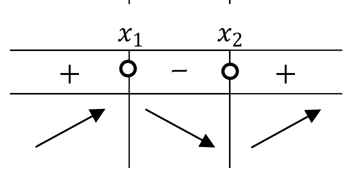
Se $a > 0$

$-2ax^2 + 2(a - b)x + a + 2b > 0$



Se $a < 0$

$-2ax^2 + 2(a - b)x + a + 2b > 0$



I punti di massimo e di minimo assoluti si trovano in x_1 *e* x_2 .

Affinché le due funzioni si intersechino in $(2\,;1)$ *deve risultare che :*

$$\begin{cases} f(2) = a\cdot 2^2 - 2 + b \\ g(2) = (a\cdot 2 + b)\cdot e^{2\cdot 2 - 2^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 4a - 2 + b \\ 1 = (2a+b)\cdot 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 3 - 4a \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ 1 = 2a + 3 - 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ 2a = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = +1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Punto 2

<u>Il grafico della funzione</u> $f(x) = x^2 - x - 1$ *è una parabola con vertice in* $V\left(\frac{1}{2}\,;\,-\frac{5}{4}\right)$ *, concavità positiva e passante per i punti* $A(2\,;1)$ *e* $B(0\,;\,-1)$.

<u>Il grafico della funzione</u> $g(x) = (x-1)\cdot e^{2x-x^2}$ *si ottiene sostituendo* $a = 1 \quad \wedge \quad b = -1$

nella funzione $g(x) = (ax+b)\cdot e^{2x-x^2}$ *con* $a \neq 0$ *studiata al punto 1.*

La funzione è definita, continua e derivabile $\forall\, x \in R$.

Interseca gli assi cartesiani nei punti $C\,(1\,;0)$ *e* $B\,(0\,;-1)$.

Interseca la funzione $f(x)$ *nei punti* $A\,(2\,;1)$ *e* $B\,(0\,;-1)$.

$\lim_{x\to\mp\infty}(x-1)\cdot e^{2x-x^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = 0$ *è un asintoto orizzontale.*

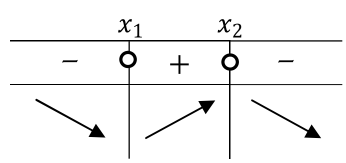
$g'(x) = [-2x^2 + 4x - 1]\cdot e^{2x-x^2}$.

$g'(x) = 0\,; \qquad -2x^2 + 4x - 1 = 0\,; \qquad 2x^2 - 4x + 1 = 0$.

$$\frac{\Delta}{4} = (1-1)^2 + 2\cdot 1^2 = 2\,; \qquad x_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{2} = \begin{matrix} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

$g'(x) > 0$

$-2ax^2 + 2(a-b)x + a + 2b > 0$



In $x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ *c'è un punto di minimo assoluto.* *In* $x_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ *c'è un punto di massimo assoluto*

Determiniamo il centro di simmetria della funzione $g(x) = (x-1)\cdot e^{2x-x^2}$.

Il punto $C(p\,;q)$ *è il centro di simmetria della funzione se applicando le equazioni della simmetria centrale la funzione trasformata* $g^I(x)$ *coincide con la funzione di partenza* $g(x)$.

Le equazioni della simmetria centrale sono : $S_C\,: \begin{cases} x' = 2p - x \\ y' = 2q - y \end{cases}$

Le equazioni inverse sono : $S_C{}^{-1}\,: \begin{cases} x = 2p - x' \\ y = 2q - y' \end{cases}$

Sostituendo nella funzione $g(x)$ *si ottiene:*

$2q - y' = (2p - x' - 1) \cdot e^{2\cdot(2p-x')-(2p-x')^2}$; *Eliminando gli apici:*

$2q - y = (2p - x - 1) \cdot e^{4p-2x-4p^2-x^2+4px}$;

$y = 2q - (2p - x - 1) \cdot e^{-2x+4px-x^2+4p-4p^2}$;

$y = 2q + (x + 1 - 2p) \cdot e^{(-2+4p)x-x^2+4p-4p^2}$;

Confrontando questa equazione con quella di $g(x)$ *affinché queste coincidano deve risultare che*

$y = \quad (x-1) \quad \cdot e^{2x-x^2}$
$y = 2q + (x + 1 - 2p) \cdot e^{(-2+4p)x-x^2+4p-4p^2}$

$\begin{cases} 2q = 0 \\ 1 - 2p = -1 \\ -2 + 4p = 2 \\ 4p - 4p^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q = 0 \\ -2p = -2 \\ 4p = 4 \\ 4p(1-p) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q = 0 \\ p = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$ $C(1\,;0)$ *è il centro di simmetria di* $g(x)$.

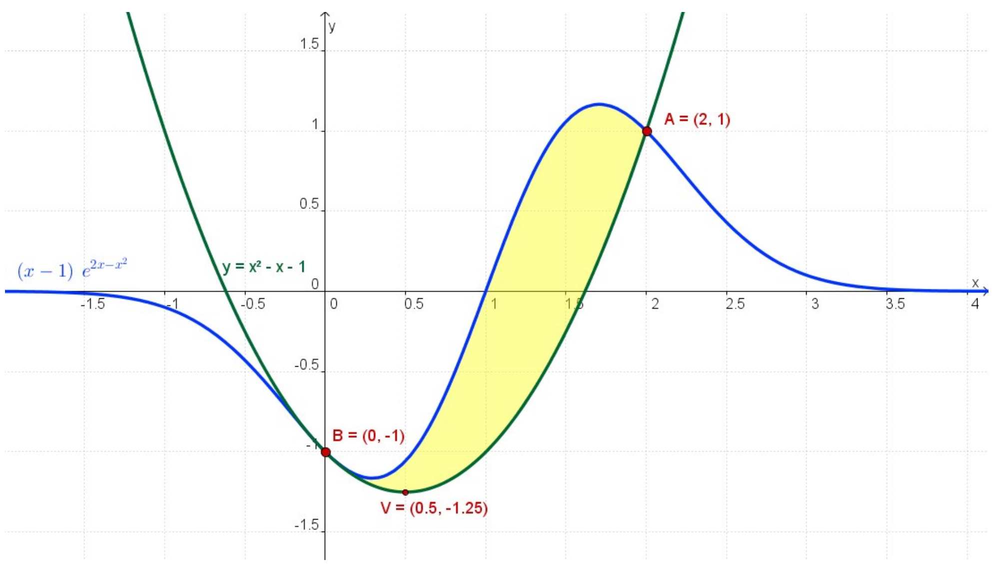
I grafici di $f(x)$ *e di* $g(x)$ *sono tangenti nel punto* $B(0\,;\,-1)$.

Infatti le tangenti alle due funzioni $f(x)$ *e* $g(x)$ *hanno lo stesso coefficiente angolare.*

$f'(x) = 2x - 1$; $\quad m_{t_f} = f'(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$g'(x) = [-2x^2 + 4x - 1] \cdot e^{2x-x^2}$; $\quad m_{t_g} = g'(0) = [-2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 1] \cdot e^{2\cdot 0 - x0^2} = -1$.

I grafici delle due funzioni sono sotto rappresentati:



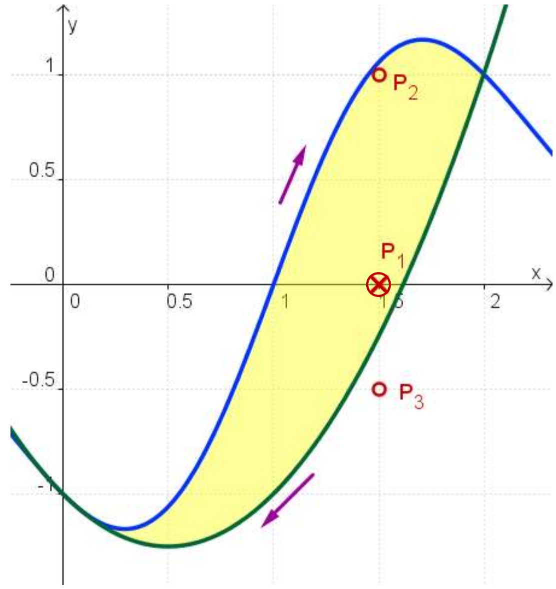
Determiniamo l'area della regione piana S *delimitata dai grafici delle funzioni* $f(x)$ *e* $g(x)$ *:*

$$S = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^2 \left[(x-1) \cdot e^{2x-x^2} - (x^2 - x - 1)\right] dx = \left[-\frac{1}{2}e^{2x-x^2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^0 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 - \left(-\frac{1}{2}e^0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 0\right)\right] = \left[-\frac{1}{2} - \frac{8}{3} + 2 + 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{-8+6+6}{3} = \frac{4}{3}.$$

Dove $\int (x-1) \cdot e^{2x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot \int (2-2x) \cdot e^{2x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{2x-x^2}$.

Punto 3



Per il Teorema di Ampere, la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa γ è direttamente proporzionale alla somma algebrica delle correnti concatenate alla linea stessa. Queste sono considerate positive se fluiscono verso la regione di spazio, la cui orientazione della linea chiusa γ, appare antioraria.

In simboli:

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_j I_j$$

dove γ indica una curva chiusa e I_j le correnti concatenate con la curva chiusa γ .

Verifichiamo se queste tre correnti sono tutte concatenate con la curva chiusa γ (cioè se P_1 e P_2 sono all'interno della curva chiusa S) .

Essendo:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \cdot e^{2\cdot\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot e^{3-\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{3}{4}} \cong 1{,}06$$

soltanto i punti $P_1\left(\frac{3}{2};0\right)$ e $P_2\left(\frac{3}{2};1\right)$ sono all'interno della curva chiusa S .

Pertanto solo i_1 e i_2 sono correnti concatenate ad S. La corrente i_3 non rientra nel calcolo.

Considerando la corrente data $i_1 = 2A$ positiva entrante nella pagina, applicando la regola della mano destra, la circuitazione lungo la curva chiusa S avviene in senso orario.

Pertanto si ha:

$$\Gamma_\gamma(\vec{B}) = \mu_0 i_1 + \mu_0\, i_2 = \mu_0(2{,}0\,A + i_2)$$

Si hanno i seguenti casi:

Circuitazione	*Corrente*
positiva	*se i_2 è entrante*
	se $i_2 < 2{,}0\,A$ uscente
negativa	*se $i_2 > 2{,}0\,A$ uscente*
nulla	*se $i_2 = 2{,}0\,A$ uscente*

Punto 4

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz,

facendo ruotare una spira S in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ *si genera una* $f.e.m.$ *indotta pari alla variazione del flusso del campo magnetico nell'unità di tempo :*

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

con $\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\, S \cos\theta$

dove θ *è l'angolo formato tra la perpendicolare al piano della spira e la direzione del campo magnetico.*

L'angolo θ *varia al variare del tempo. Essendo la velocità angolare ω costante, si ha :* $\theta = \omega t$ *.*

Sostituendo nella predente relazione si ottiene:

$\Phi(\vec{B}) = B\, S \cos \omega t$.

Pertanto, la $f.e.m.$ *indotta è :* $f.e.m. = \frac{-d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d\,[B\, S \cos \omega t]}{dt} = -BS(-\omega \operatorname{sen} \omega t) = \omega BS \operatorname{sen} \omega t$

Per la prima legge di Ohm la corrente indotta è : $i = \frac{f.e.m.}{R} = \frac{\omega BS}{R} \operatorname{sen} \omega t$

Tale corrente è massima quando $\operatorname{sen} \omega t = 1$.

Quindi : $i_{MAX} = \frac{\omega BS}{R}$

Da cui si ricava:

$$\omega = \frac{i_{MAX}\ R}{BS} = \frac{5{,}0 \cdot 10^{-3}\ A \cdot 0{,}20\ \Omega}{1{,}5 \cdot 10^{-2}\ T \cdot \frac{4}{3} m^2} = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \frac{A \cdot \frac{V}{A}}{V \cdot s \cdot m^{-2} \cdot m^2} = 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ s^{-1} .$$