ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2017

QUESTIONARIO

Quesito 1

Definito il numero $E = \int_0^1 xe^x\,dx$ *, dimostrare che risulta:* $\int_0^1 x^2e^x\,dx \;=\; e - 2E$*, ed esprimere* $\int_0^1 x^3e^x\,dx$ *in termini di e ed E.*

Soluzione

Utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx \;=\; f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

si ha:

$$\int x^2e^x\,dx \;=\; x^2e^x - \int 2x\cdot e^x\,dx \;=\; x^2e^x - 2\cdot\int xe^x\,dx$$

Pertanto:

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx \;=\; [x^2e^x]_0^1 - 2\cdot\int_0^1 xe^x\,dx \;=\; e - 2E\ .$$

Utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$\int x^3e^x\,dx \;=\; x^3e^x - \int 3x^2\cdot e^x\,dx \;=\; x^3e^x - 3\cdot\int x^2\cdot e^x\,dx$$

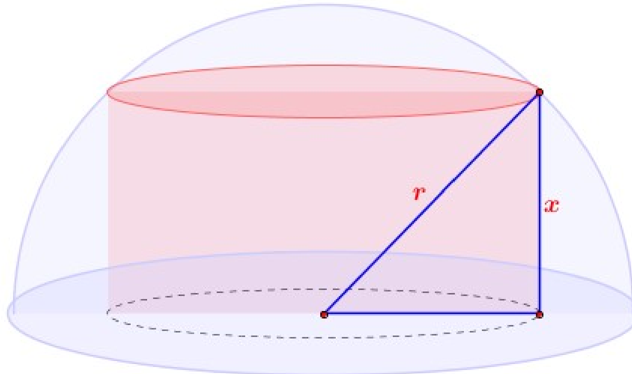
Pertanto:

$$\int_0^1 x^3e^x\,dx \;=\; [x^3e^x]_0^1 - 3\cdot\int_0^1 x^2\cdot e^x\,dx \;=\; e - 3\cdot(e-2E) \;=\; 6E - 2e\ .$$

Quesito 2

Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma semisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $3/5$ del volume della semisfera.

Soluzione 1



Sia r il raggio della semisfera.

Il volume della semisfera è $V_{Semisfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi\, r^3 = \frac{2}{3} \pi\, r^3$.

Sia x la misura dell'altezza della torta di forma cilindrica, con $0 < x < r$.

La misura del raggio della torta è: $r_{Torta} = \sqrt{r^2 - x^2}$

Il volume della torta di forma cilindrica è $V_{Torta} = \pi \cdot (r^2 - x^2) \cdot x$.

Determiniamo la torta di forma cilindrica di volume massimo.

$$V'(x) = \pi \cdot [-2x \cdot x + (r^2 - x^2) \cdot 1\ ] = \pi \cdot [-2x^2 + r^2 - x^2\ ] = \pi \cdot [-3x^2 + r^2\ ]$$

$$V'(x) \ge 0\ ; \quad \pi \cdot [-3x^2 + r^2\ ] \ge 0\ ; \quad -3x^2 + r^2 \ge 0\ ; \quad -0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}\, r$$

Pertanto la torta di forma cilindrica di volume massimo si ha per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}\, r$

Il volume massimo della torta di forma cilindrica è

$$V_{Max\ Torta} = \pi \cdot (r^2 - x^2) \cdot x = \pi \cdot \left(r^2 - \frac{1}{3} r^2\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\, r = \pi \cdot \frac{2}{3} r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\, r = \frac{2}{9} \sqrt{3}\, \pi\, r^3 .$$

$$\frac{V_{Max\ Torta}}{V_{Semisfera}} = \frac{\frac{2}{9}\sqrt{3}\,\pi\, r^3}{\frac{2}{3}\pi\, r^3} = \frac{2}{9}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577 \ < \ \frac{3}{5} = 0{,}6 .$$

Soluzione 2

Sia x la misura del raggio della torta di forma cilindrica, con $0 < x < r \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{r^2 - x^2}$

Il volume della torta di forma cilindrica è $V_{Torta} = \pi\, x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$V(x) = \pi\, x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V'(x) = \pi \cdot \left[2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x)\ \right] = \pi \cdot \left[2x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right] =$$

$$= \pi \cdot \frac{2x(r^2 - x^2) - x^3}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \pi \cdot \frac{2r^2 x - 2x^3 - x^3}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \pi \cdot \frac{2r^2 x - 3x^3}{\sqrt{r^2 - x^2}} .$$

$$V'(x) \ge 0\ ; \quad 2r^2 x - 3x^3 \ge 0\ ; \quad x \cdot (2r^2 - 3x^2) \ge 0\ ; \quad \begin{matrix} x \ge 0 \\ 2r^2 - 3x^2 \ge 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x \ge 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\, r < x < \sqrt{\frac{2}{3}}\, r \end{matrix}$$

Pertanto la torta di forma cilindrica di volume massimo si ha per $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\, r$

Il volume massimo della torta di forma cilindrica è

$$V_{Max\ Torta} = \pi \frac{2}{3}\, r^2 \cdot \sqrt{r^2 - \frac{2}{3} r^2} = \frac{2}{3} \pi\, r^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} r^2} = \frac{2}{3} \pi\, r^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} r = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi\, r^3 = \frac{2}{9} \sqrt{3}\, \pi\, r^3 .$$

Quesito 3

Sapendo che:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x}=1$$

determinare i valori di a e b.

Soluzione

Poiché il denominatore tende a zero, affichè il limite possa valere 1 deve essere della forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ *se* $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{ax+2b}-6\right)=0$

ciò si verifica se $\sqrt{2b}-6=0\,;\quad \sqrt{2b}=6\,;\quad 2b=36\,;\quad b=18$.

Pertanto il limite diventa: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+36}-6}{x}$

Tale limite vale 1 se applicando il Teorema di De L'Hospital $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a}{2\sqrt{ax+36}}}{1}$ *il numeratore tende a 1.*

Ciò si verifica se $a=12$

In definitiva i valori cercati sono: $a=12$ *e* $b=18$.

Verifica:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{12x+36}-6}{x}=\frac{0}{0}=?$$

Applicando il Teorema di De L'Hospital si ha: $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{12}{2\sqrt{12x+36}}}{1}=1$.

Quesito 4

Per sorteggiare numeri reali nell'intervallo $[0, 2]$ viene realizzato un generatore di numeri casuali che fornisce numeri distribuiti, in tale intervallo, con densità di probabilità data dalla funzione:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Quale sarà il valore medio dei numeri generati?

Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 4/3?

Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1?

Soluzione

Il valore medio dei numeri generati è :

$$M(x) = \int_0^2 x \cdot f(x)\,dx \quad = \quad \int_0^2 x \cdot \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right)\,dx \quad = \quad \int_0^2 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^4\right)\,dx \quad =$$

$$= \quad \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\right]_0^2 \quad = \quad \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{32}{5} - 0 + 0 \quad = \quad 6 - \frac{24}{5} \quad = \quad \frac{6}{5} \quad = \quad 1{,}2 \quad .$$

Trattandosi di una distribuzione continua, la probabilità che il primo numero estratto sia $\frac{4}{3}$ *è praticamente nulla. Infatti è impossibile estrarre esattamente il numero* $\frac{4}{3}$ *fra gli infiniti numeri compresi nell'intervallo* $[0\,, 2]$. *Pertanto* $P\left(X = \frac{4}{3}\right) = 0$.

La probabilità che il secondo numero estratto sia minore di 1 è :

$$P(X < 1) \quad = \quad \int_0^1 f(x)\,dx \quad = \quad \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3\right)\,dx \quad = \quad \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^1 \quad =$$

$$= \quad \frac{3}{2}\cdot\frac{1^3}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1^4}{4} \quad = \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{16} \quad = \quad \frac{5}{16} \quad .$$

Quesito 5

Dati i punti $A(-2, 3, 1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(2, 2, -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C.

Soluzione

Le equazioni parametriche della retta passante per A e B sono del tipo: $\begin{cases} x = x_P + l \cdot t \\ y = y_P + m \cdot t \\ z = z_P + n \cdot t \end{cases}$

I coefficienti direttivi sono:

$l = x_B - x_A = 3 - (-2) = 5$

$m = y_B - y_A = 0 - 3 = -3$

$n = z_B - z_A = -1 - (-1) = -2$

Pertanto le equazioni parametriche della retta passante per A e B sono: $\begin{cases} x = 3 + 5\,t \\ y = -3\,t \\ z = -1 - 2\,t \end{cases}$

Un piano perpendicolare alla retta r *ha equazione del tipo:* $lx + my + nz + d = 0$.

Nel nostro caso: $l = 5$; $m = -3$; $n = -2$.

Quindi un generico piano perpendicolare alla retta r *ha equazione:* $5x - 3y - 2z + d = 0$.

Fra gli infiniti piani perpendicolari alla retta r determiniamo quello passante per il punto $C(2\,;2\,;\,-3)$, *imponendo il passaggio per* C.

$5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + d = 0$; $\quad 10 - 6 + 6 + d = 0$; $\quad d = -10$

Pertanto il piano π *perpendicolare alla retta* r *e passante per il punto* C *ha equazione:*

$5x - 3y - 2z - 10 = 0$.

Oppure

Le equazioni ridotte della retta passante per A e B sono:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \\ \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{z - z_A}{z_B - z_A} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x - (-2)}{3 - (-2)} = \dfrac{y - 3}{0 - 3} \\ \dfrac{y - 3}{0 - 3} = \dfrac{z - 1}{-1 - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x + 2}{5} = \dfrac{y - 3}{-3} \\ \dfrac{y - 3}{-3} = \dfrac{z - 1}{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3(x + 2) = 5(y - 3) \\ -2(y - 3) = -3(z - 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x - 6 = 5y - 15 \\ -2y + 6 = -3z + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x = 5y - 9 \\ -2y = -3z - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5}{3}y + 3 \\ y = \dfrac{3}{2}z + \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{3}{2}z + \dfrac{3}{2}\right) + 3 \\ y = \dfrac{3}{2}z + \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2}z - \dfrac{5}{2} + 3 \\ y = \dfrac{3}{2}z + \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2}z + \dfrac{1}{2} \\ y = +\dfrac{3}{2}z + \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Oppure

Le equazioni parametriche della retta passante per A e B sono:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \;; \qquad \frac{x - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{y - 3}{0 - 3} = \frac{z - 1}{-1 - 1} \;; \qquad \frac{x + 2}{5} = \frac{y - 3}{-3} = \frac{z - 1}{-2} \;;$$

$$\begin{cases} \dfrac{x + 2}{5} = t \\ \dfrac{y - 3}{-3} = t \\ \dfrac{z - 1}{-2} = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2 = 5\,t \\ y - 3 = -3t \\ z - 1 = -2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 + 5\,t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Quesito 6

Determinare il numero reale a in modo che il valore di

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x - x}{x^a}$$

sia un numero reale non nullo.

Soluzione

Se $a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x - x}{x^a}$

Pertanto deve essere $a > 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x - x}{x^a} = \frac{0}{0} = ?$ *Applicando il Teorema di De L'Hospital*

$\lim_{x \to 0} \frac{cos\, x - 1}{a x^{a-1}} = \frac{0}{0} = ?$ *Applicando il Teorema di De L'Hospital*

$\lim_{x \to 0} \frac{-sen\, x}{a(a-1)x^{a-2}} = \frac{0}{0} = ?$ *Applicando il Teorema di De L'Hospital*

$\lim_{x \to 0} \frac{-cos\, x}{a(a-1)(a-2)x^{a-3}} = \frac{-1}{6} = ?$ *Se* $a = 3$

Verifica

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x - x}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{H}{\cong} \lim_{x \to 0} \frac{cos\, x - 1}{3x^2} = \frac{0}{0} \overset{H}{\cong} \lim_{x \to 0} \frac{-sen\, x}{6x} = \frac{0}{0} \overset{H}{\cong} \lim_{x \to 0} \frac{-cos\, x}{6} = -\frac{1}{6} \; .$$