ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2016

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 SCIENTIFICO
LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.

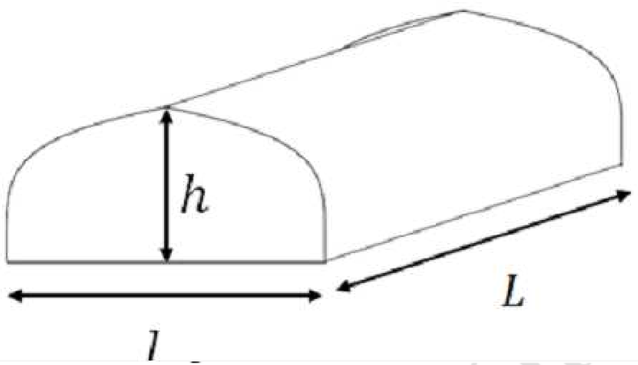


Figura 1

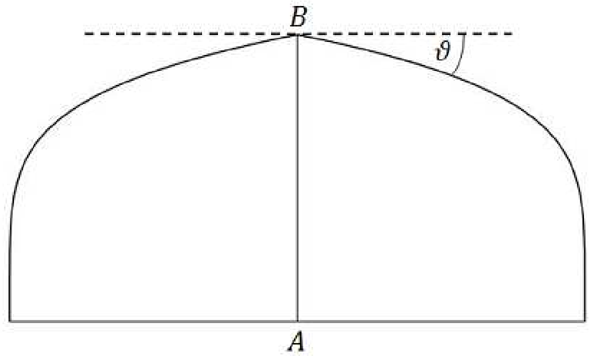


Figura 2

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10°$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.
3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

Punto 1

La funzione che meglio descrive il profilo del serbatoio deve avere le seguenti caratteristiche:

1. $f(x)$ *è simmetrica rispetto all'asse* y
2. $f(0) = 1$
3. $f(-1) = f(+1) = 0$
4. *deve avere un punto angoloso in* $x = 0$ *con un angolo* $\vartheta \geq 10°$

Le prime due caratteristiche sono soddisfatte da tutte e tre le famiglie di funzioni.

La terza caratteristica è soddisfatta per ogni valore di k *dalla prima famiglia e dalla terza famiglia di funzioni.*

Mentre per la seconda famiglia di funzioni è soddisfatta per $k = 1$.

Infatti:

$f(+1) = 0$; $\quad -6|1|^3 + 9k1^2 - 4|1| + 1 = 0$; $\quad -6 + 9k - 4 + 1 = 0$; $\quad 9k - 9 = 0 \quad k = 1$.

$f(-1) = 0$; $\quad -6|-1|^3 + 9k(-1)^2 - 4|-1| + 1 = 0$; $\quad -6 + 9k - 4 + 1 = 0$; $\quad 9k - 9 = 0$; $\quad k = 1$.

Pertanto l'unica funzione della seconda famiglia di funzioni che soddisfa la terza condizione è:

$f(x) = -6|x|^3 + 9x^2 - 4|x| + 1$

Sfruttando la simmetria della famiglia di funzioni, conviene studiarla nell'intervallo $[0, 1]$.

Essa diventa: $f(x) = -6x^3 + 9x^2 - 4x + 1$

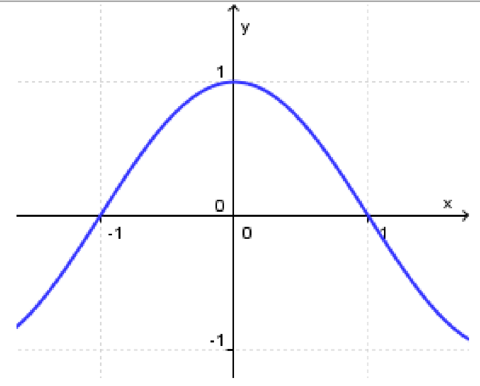
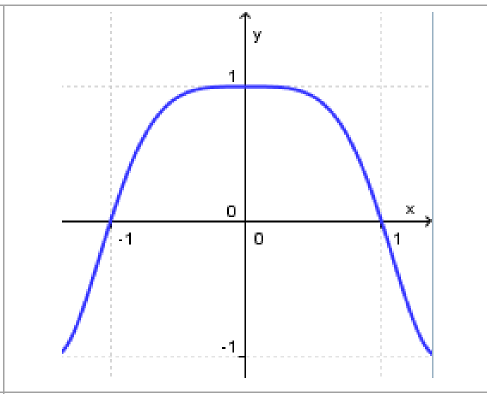
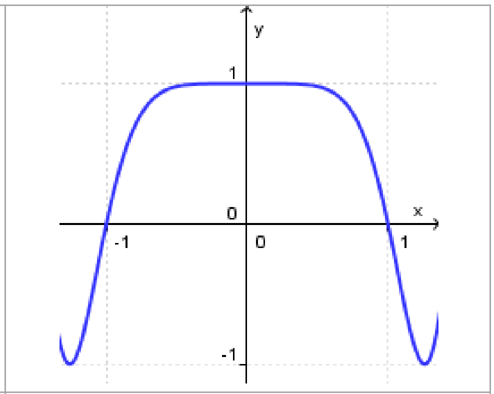
$f'(x) = -18x^2 + 18x - 4$

$f'(x) \geq 0$; $\quad -18x^2 + 18x - 4 \geq 0$; $\quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ *di conseguenza la funzione non risulta decrescente, come richiesto, in tutto l'intervallo* $[0, 1]$. *Pertanto la seconda famiglia di funzioni è da scartare.*

La terza funzione $f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$ *è da escludere perché non presenta il punto angoloso richiesto.*

Infatti: $f'(x) = -\frac{\pi}{2}kx^{k-1} \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$ *che risulta derivabile nel punto* $x = 0$.

(In realtà la funzione goniometrica $y = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$ *è infinitamente derivabile).*

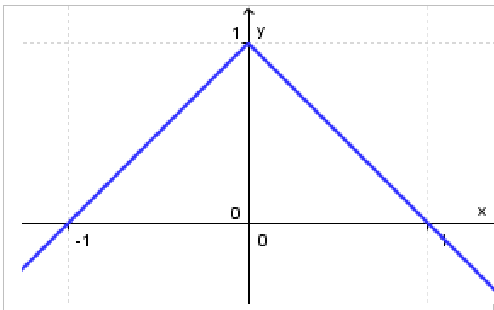
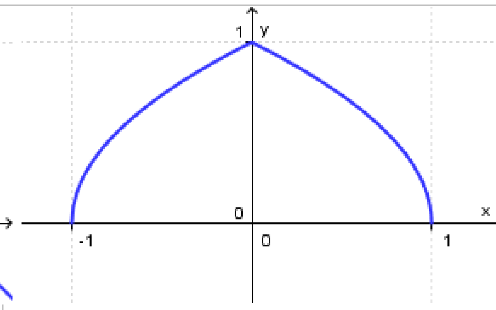
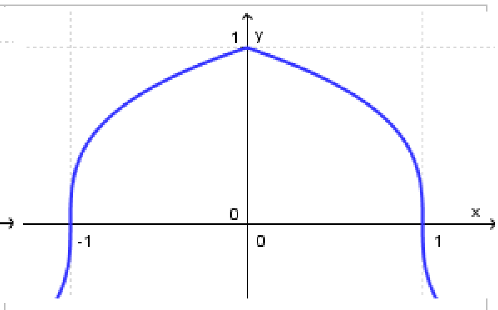
		
$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^1\right)$	$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^3\right)$

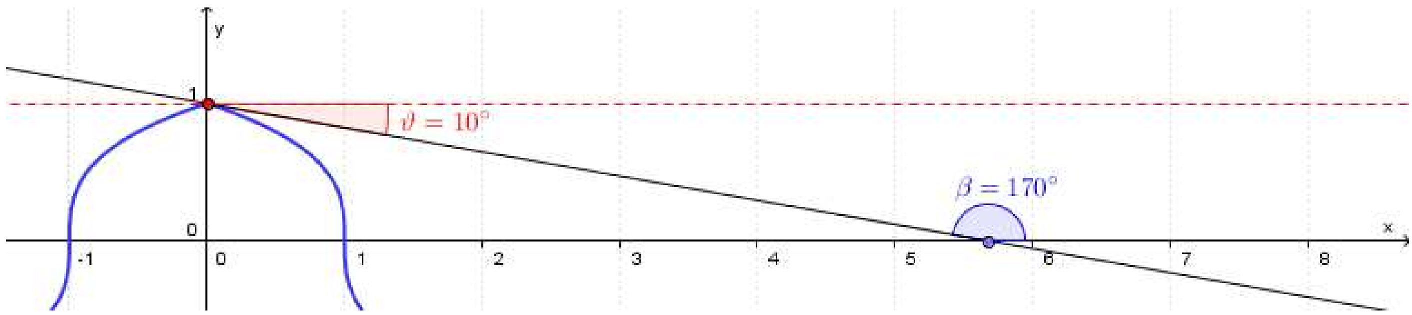
In definitiva la famiglia di funzioni che meglio descrive il profilo del serbatoio è la prima $f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$.

Sfruttando la simmetria della famiglia di funzioni, conviene studiarla nell'intervallo $[0\,,1]$.

Essa diventa: $f(x) = (1 - x)^{\frac{1}{k}}$

$f'(x) = -\frac{1}{k} \cdot (1 - x)^{\frac{1}{k}-1}$ $\qquad$ $f'_+(0) = -\frac{1}{k} \cdot (1 - 0)^{\frac{1}{k}-1} = -\frac{1}{k} \cdot 1^{\frac{1}{k}-1} = -\frac{1}{k}$

		
$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{1}}$	$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{1 - |x|}$	$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1 - |x|}$



La condizione $\vartheta \geq 10°$ *equivale a* $\beta \leq 170°$.

Applicando la funzione tangente ad ambo i membri si ottiene $tan\,\beta \leq tan\,170°$.

Ma $tan\,\beta = f'_+(0) = -\frac{1}{k}$

Pertanto si ha: $-\frac{1}{k} \leq tan\,170°$; $\qquad -\frac{1}{k} \leq -0{,}176$; $\qquad \frac{1}{k} \geq 0{,}176$;

Essendo $k > 0$ *si ha:* $k \leq \frac{1}{0{,}176}$; $\qquad k \leq 5{,}67$.

Punto 2

Il volume del serbatoio è dato dall'area della sezione trasversale moltiplicata per la lunghezza L del serbatoio. Sfruttando la simmetria della famiglia di funzioni:

$$V \;=\; 2\,L\cdot\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx \;=\; 2\cdot 8\cdot\left[-\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right]_0^1 \;=\; 16\cdot\left[-\frac{(1-x)^{\left(\frac{1+k}{k}\right)}}{\left(\frac{1+k}{k}\right)}\right]_0^1 \;=$$

$$=\; 16\cdot\left[-\left(\frac{k}{1+k}\right)(1-x)^{\left(\frac{1+k}{k}\right)}\right]_0^1 \;=$$

$$=\; 16\cdot\left[-\left(\frac{k}{1+k}\right)(1-1)^{\left(\frac{1+k}{k}\right)}-\left(-\left(\frac{k}{1+k}\right)(1-1)^{\left(\frac{1+k}{k}\right)}\right)\right]_0^1 \;=$$

$$=\; 16\cdot\left[\left(\frac{k}{1+k}\right)\cdot 1^{\frac{1+k}{k}}\right] \;=\; 16\cdot\frac{k}{1+k}\;.$$

Dovendo essere la capacità del serbatoio pari ad almeno $13\,m^3$ *si ottiene:*

$$16\cdot\frac{k}{1+k}\geq 13\;;\qquad \frac{16k-13-13k}{1+k}\geq 0\;;\qquad \frac{3k-13}{1+k}\geq 0\;;$$

Essendo $k>0$ *si ottiene:*

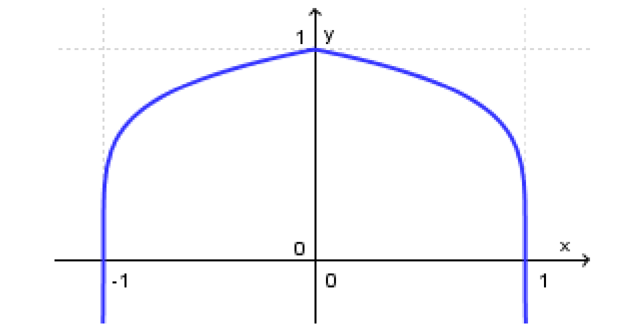
$$3k-13\geq 0\;;\qquad k\geq\frac{13}{3}\;;\qquad k\geq 4,\overline{3}\quad .$$

Essendo k intero positivo, dalle due relazioni: $k\geq 4,\overline{3}$ *e* $k\leq 5{,}67$ *si deduce che il valore di k richiesto è 5.*

Per $k=5$ *la funzione è*

$f(x)=(1-|x|)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{1-|x|}$

il cui grafico è raffigurato a lato.



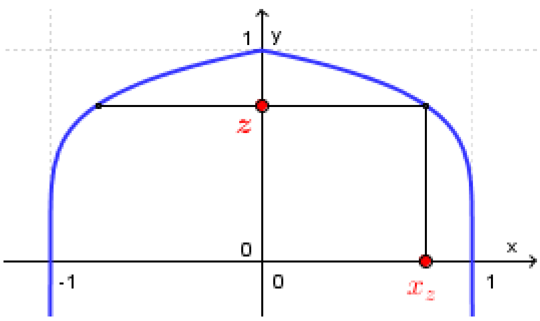
Sostituendo $k=5$ *si ottiene il volume del serbatoio:* $V \;=\; 16\cdot\frac{k}{1+k} \;=\; \frac{80}{6} \;\cong\; 13{,}3\,m^3$.

Punto 3

Per determinare la funzione $V(z)$ *che rappresenta il volume occupato dal liquido in funzione dell'altezza raggiunta, occorre svolgere un integrale sull'asse delle ordinate per determinare l'area* $S(z)$ *della semisezione verticale del serbatoio.*

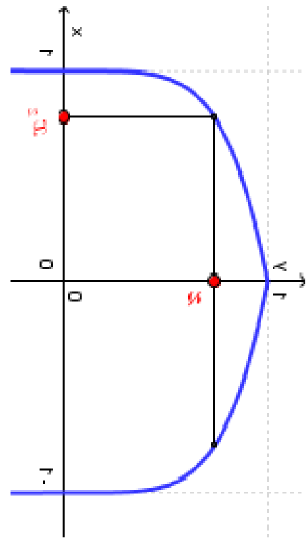
Per fare ciò occorre trovare la funzione inversa di $f(x)$.

La funzione $f(x)$ *è invertibile perché è biunivoca. Infatti* $f(x)$ *è strettamente decrescente nell'intervallo* $[0\,,1]$ *).*



$$y=(1-x)^{\frac{1}{5}}\;;\qquad\quad y^5=1-x\;;\qquad\quad x=1-y^5\,.$$

Il volume di gasolio contenuto nel serbatoio in funzione del livello z è espresso da:



$$V(z) = 2 \cdot L \cdot \int_0^z (1 - y^5)\, dy = 2 \cdot 8 \cdot \left[y - \frac{y^6}{6} \right]_0^z = 16 \cdot \left(z - \frac{z^6}{6} \right)$$

con $0 \le z \le 1$.

La percentuale di serbatoio riempito, quando il livello di gasolio è alla quota z *è:*

$$P(z) = \frac{V(z)}{V} \cdot 100\ \% = \frac{16 \cdot \left(z - \frac{z^6}{6} \right)}{\frac{80}{6}} \cdot 100\ \% =$$

$$= \frac{6}{80} \cdot 16 \cdot 100\ \% \cdot \left(z - \frac{z^6}{6} \right) = 120 \cdot \left(z - \frac{z^6}{6} \right)\ \% =$$

$$= (120z - 20z^6)\ \% .$$

Punto 4

L'amministratore ha torto o ragione?

Se nella formulazione precedente della percentuale di serbatoio riempito, si sostituisce l'altezza di riempimento $z = 0{,}5\ m$, *invece di ottenere la percentuale del 50% supposta dall'amministratore, si ottiene il seguente risultato :*

$$P(0{,}5) = (120 \cdot 0{,}5 - 20 \cdot 0{,}5^6)\ \% = \left(60 - \frac{20}{64} \right)\ \% = \left(60 - \frac{5}{16} \right)\ \% = \frac{960 - 5}{16}\ \% = \frac{955}{16}\ \% = 59{,}7\% .$$

Il risultato è corretto e l'amministratore ha torto.

Infatti, il profilo curvo del serbatorio determina una maggiore capienza nella parte inferiore e una minore capienza nella parte superiore. Pertanto, quando il gasolio raggiunge il livello di metà altezza, il serbatoio contiene una quantità di gasolio superiore al 50%.

Se invece il serbatoio avesse una sezione verticale a larghezza costante, allora esisterebbe una proporzionalità diretta fra la quota z raggiunta e la percentuale di riempimento del serbatoio $P(z) = z \cdot 100\%$.

L'errore $E(z)$ *può essere stimato come la differenza tra le due espressioni percentuali del volume corretto dato dalla funzione* $V(z)$ *e del volume errato stimato come una proporzionalità diretta .*

$$E(z) = (120z - 20z^6) - 100z = 20z - 20z^6 \qquad con \quad 0 \le z \le 1 .$$

Per determinare il massimo errore che si commette studiamo il segno della derivata prima.

$$\mathrm{E}'(\mathrm{z}) = 20 - 120z^5 .$$

$$\mathrm{E}'(\mathrm{z}) = 0 ; \quad 20 - 120z^5 = 0 ; \quad 120z^5 = 20 ; \quad z^5 = \frac{1}{6} ; \quad z = \sqrt[5]{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \cong 0{,}699 .$$

$$\mathrm{E}'(\mathrm{z}) > 0 ; \quad 20 - 120z^5 > 0 ; \quad 120z^5 < 20 ; \quad z^5 < \frac{1}{6} ; \quad 0 < z < \frac{1}{\sqrt[5]{6}} .$$

$$\mathrm{E}'(\mathrm{z}) < 0 ; \quad 20 - 120z^5 < 0 ; \quad 120z^5 > 20 ; \quad z^5 > \frac{1}{6} ; \quad \frac{1}{\sqrt[5]{6}} < z < 1 .$$

Pertanto l'errore risulta massimo in corrispondenza di $z = \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \cong 0{,}699$.

Tale errore vale:

$$E\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) = 20 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{6}} - 20 \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)^6 = 20 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}} - \frac{1}{\sqrt[5]{6^6}}\right) = 20 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}} - \frac{1}{6\sqrt[5]{6}}\right) = 20 \cdot \left(\frac{6-1}{6\sqrt[5]{6}}\right) = 20 \cdot \left(\frac{6-1}{6\sqrt[5]{6}}\right) =$$

$$= \frac{100}{6\sqrt[5]{6}} \cong 11{,}647 \qquad \Rightarrow \qquad E(z) = 11{,}647\ \% .$$