ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2009

CORSO DI ORDINAMENTO

Questionario

Quesito 1

Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è sen x e il cui grafico passa per il punto $(0; 2)$.

Soluzione

Una primitiva della funzione $f(x)$ è la funzione $F(x) = -\cos x + k$ con $k \in R$.

Imponendo il passaggio per il punto $(0; 2)$ si ricava il valore del parametro k.

$F(0) = -\cos 0 + k$; $2 = -1 + k$; $k = 3$.

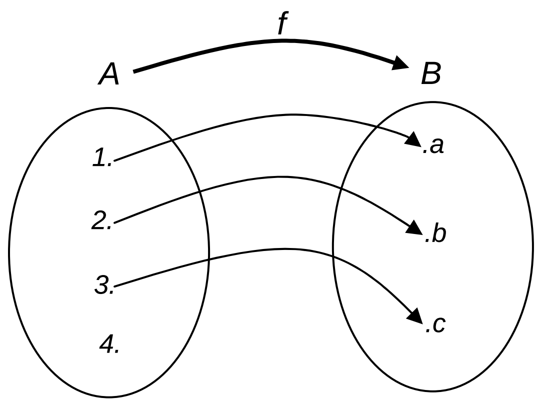
Pertanto la funzione richiesta è: $F(x) = -\cos x + 3$

Quesito 2

Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{a, b, c\}$. *Tra le possibili funzioni (o applicazioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?*

Soluzione

Una funzione è una corrispondenza fra due insiemi non vuoti A e B, che associa ad ogni elemento dell'insieme A uno ed un solo elemento dell'insieme B.

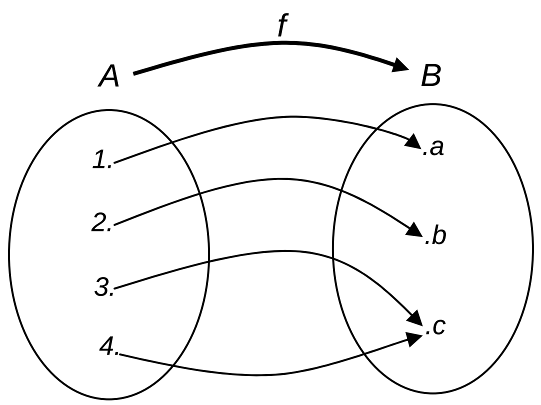


La corrispondenza a lato non è una funzione perché all'elemento $4 \in A$ *non è associato alcun elemento nell'insieme B.*

Ricordando la definizione di funzione iniettiva:

"una funzione si dice iniettiva quando ogni elemento dell'insieme B è immagine al più di un elemento dell'insieme A"

possiamo affermare che non esistono funzioni iniettive, poiché il numero degli elementi dell'insieme A è maggiore del numero degli elementi dell'insieme B.



La corrispondenza a lato è una funzione, perché ad ogni elemento dell'insieme A corrisponde uno è un solo elemento nell'insieme B. Ma tale funzione non è iniettiva perché l'elemento $c \in B$ *è immagine di due elementi, il 3 e il 4, dell'insieme A.*

Ricordando la definizione di funzione suriettiva:

"una funzione si dice suriettiva quando ogni elemento dell'insieme B è immagine di almeno un elemento dell'insieme A"

possiamo affermare che le funzioni suriettive fra gli insiemi A e B esistono.

La funzione rappresentata sopra è una funzione suriettiva ma, come sopra dimostrato, non iniettiva.

Ricordando la definizione di funzione biiettiva:

"una funzione si dice biiettiva quando è sia iniettiva sia suriettiva"

possiamo affermare che non esistono funzioni biiettive.

Quesito 3

Per quale o quali valori di k *la curva di equazione:* $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ *ha una sola tangente orizzontale ?*

Soluzione

La funzione è continua e derivabile $\forall x \in R$ *.*

I punti a tangente orizzontale coincidono quindi con i punti stazionari, cioè i punti con derivata prima nulla.

$f^I(x) = 3x^2 + 2kx + 3$

$f^I(x) = 0$; $\quad 3x^2 + 2kx + 3 = 0$;

Essa ammette due soluzioni reali e coincidenti quando il determinante è uguale a zero:

$\frac{\Delta}{4} = k^2 - 9 = 0$; $\quad k = \mp 3$.

Quesito 4

“Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni”. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

Soluzione

Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti tra loro. Diversamente dagli analoghi poligoni regolari nel piano, che possono avere un infinito numero di lati, i poliedri regolari, nello spazio, sono solo cinque.
Infatti in ogni vertice del poliedro regolare devono concorrere almeno tre facce costituite da poligoni regolari e la somma degli angoli delle facce che si incontrano in tali vertici deve essere minore di 360 gradi; in caso contrario le facce si appiattirebbero in uno stesso piano.
Questo implica che non è possibile avere facce esagonali o con un numero maggiore di lati, dato che questi poligoni hanno angoli interni maggiori o uguali a 120 gradi.

Pertanto:

- *se le facce che concorrono in un vertice sono triangoli equilateri (angoli di 60°), si hanno tre casi:*
  - *3 facce (somma degli angoli uguale a 180°) – TETRAEDRO (4 triangoli equilateri)*
  - *4 facce (somma degli angoli uguale a 240°) – OTTAEDRO (8 triangoli equilateri)*
  - *5 facce (somma degli angoli uguale a 300°) – ICOSAEDRO (20 triangoli equilateri)*

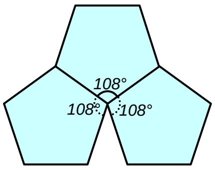
  Non si possono costruire poliedri regolari aventi 6 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 360°, e quindi tassellano il piano.

- *se le facce che concorrono in un vertice sono quadrati (angoli di 90°), si ha solo un caso:*
  - *3 facce (somma degli angoli uguale a 270°) – CUBO o ESAEDRO (6 quadrati)*

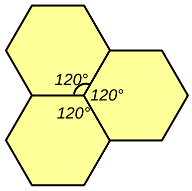
  Non si possono costruire poliedri regolari aventi 4 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 360°, e quindi tassellano il piano.

- *se le facce che concorrono in un vertice sono pentagoni regolari (angoli di 108°) si ha solo un caso:*
  - *3 facce (somma degli angoli uguale a 324°) – DODECAEDRO (12 pentagoni regolari).*

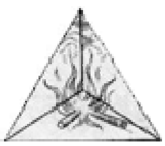
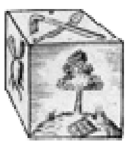
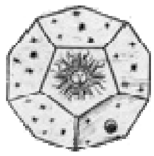
  Non si possono costruire poliedri regolari aventi 4 facce, perché la somma degli angoli è uguale a 432°, e quindi il poliedro è irrealizzabile.



- ***Non si possono costruire poliedri regolari aventi facce costituite da esagoni regolari*** *perché 3 esagoni regolari tassellano il piano (somma degli angoli uguale a $3 \cdot 120 = 360°$).*



I cinque corpi regolari

				
Tetraedro *4 facce triangolari* *6 spigoli* *4 vertici*	***Cubo*** *6 facce quadrate* *12 spigoli* *8 vertici*	***Ottaedro*** *8 facce triangolari* *12 spigoli* *6 vertici*	***Icosaedro*** *20 facce triangolari* *30 spigoli* *12 vertici*	***Dodecaedro*** *12 facce pentagonali* *30 spigoli* *20 vertici*

Proclo, storico della matematica del V secolo dopo Cristo, attribuisce a Pitagora la scoperta dei 5 poliedri regolari.

Platone userà questa straordinaria scoperta come simbologia dell'universo e dei suoi elementi base: il fuoco (tetraedro), la terra (cubo), l'aria (ottaedro) e l'acqua (l'icosaedro). Il quinto poliedro regolare, il dodecaedro, era a simboleggiare la quinta essenza che tutto avvolge e comprende. La metafora ha un qualche senso matematico dato che è possibile dimostrare che l'unico poliedro regolare nel quale sia possibile inscrivere gli altri 4 è il dodecaedro. Questa tradizione neo-platonica resterà viva fino a Keplero che credette di poter descrivere i moti dei pianeti in termini di poliedri e loro reciproche inclusioni.

Quesito 5

Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

Soluzione

Una frazione è una coppia ordinata di numeri interi, di cui il secondo è diverso da 0.

In simboli: $\frac{n}{d}$ *con* $n, d \in Z$ *e* $d \neq 0$.

Pertanto in base a questa definizione soltanto la prima frazione ha significato, e il suo valore è zero.

Infatti: $\frac{0}{1} = 0$ *perché* $0 \cdot 1 = 0$

Inoltre:

$\frac{1}{0} = x$ *perché* $0 \cdot x = 1$ *non esiste alcun numero che moltiplicato per zero da per risultato uno.*

$\frac{0}{0} = x$ *perché* $0 \cdot x = 0$ *ma di numeri che moltiplicati per zero danno risultato zero c'è ne sono infiniti.*

Ricordando infine che $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{\text{n volte}} \Rightarrow 0^0 = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot .... \cdot 0}_{\text{0 volte}} = ?$

moltiplicare zero per se stesso zero volte non ha alcun significato.

Quesito 6

Si calcoli $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Soluzione

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1 \ .$$

Quesito 7

Si dimostri l'identità: $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

Soluzione

Dalla definizione di coefficiente binomiale si ha:

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (k+1)} \cdot \frac{n-k}{(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{(n-k-1)!} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot [n-(k+1)]!} = \binom{n}{k+1}.$$

Quesito 8

Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 *e* 0.

Soluzione

Trattandosi di un'equazione di grado 2009, conviene studiare la funzione $y = x^{2009} + 2009x + 1$ *ad essa associata e verificare che il suo grafico è una curva che tocca l'asse delle x in un solo punto appartenente all'intervallo* $(-1, 0)$.

La funzione $y = x^{2009} + 2009x + 1$ *è continua e derivabile* $\forall x \in R$.

$f(-1) = -1 - 2009 + 1 = -2009$ *mentre* $f(0) = 1$

Pertanto, per il Teorema dell'esistenza degli zeri, ammette almeno una soluzione nell'intervallo $(-1, 0)$.

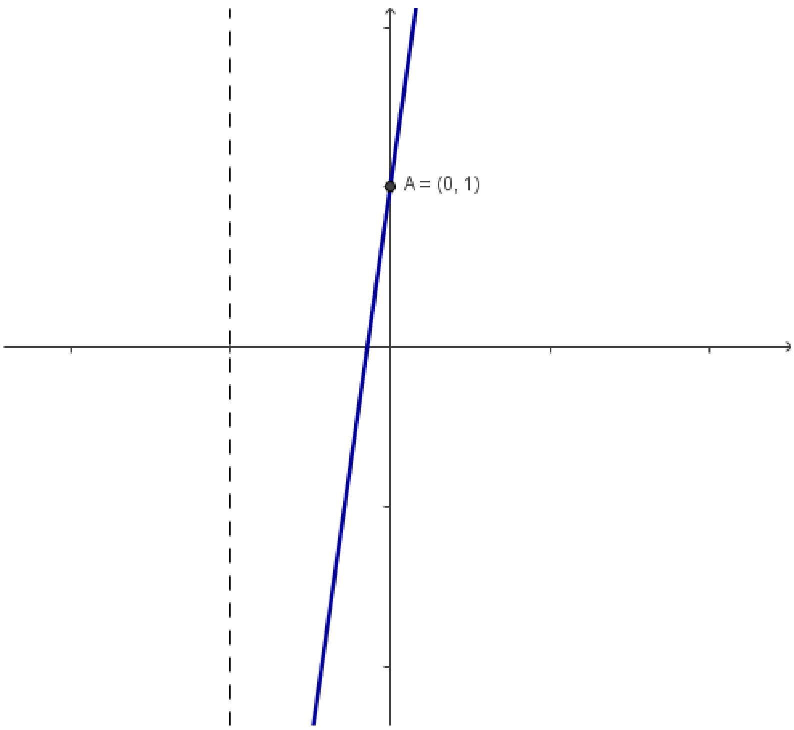
Continuando con lo studio della derivata prima:

$f^{I}(x) = 2009x^{2008} + 2009$

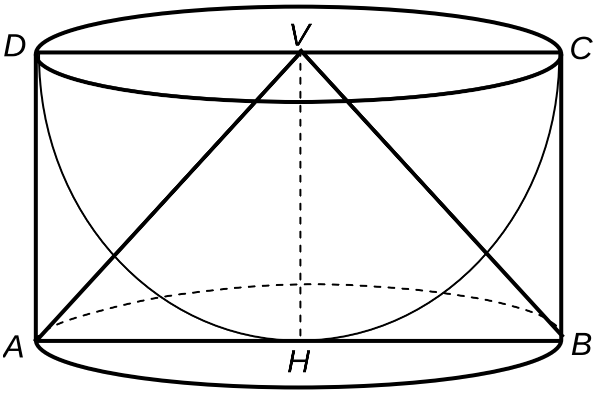
$f^{I}(x) = 0$; $2009x^{2008} + 2009 = 0$; $x^{2008} + 1 = 0$; *la derivata prima non si annulla mai.*

$f^{I}(x) > 0$; $2009x^{2008} + 2009 > 0$; $x^{2008} + 1 > 0$; *la derivata prima è positiva* $\forall x \in R$.

Poiché la derivata prima è sempre positiva nel suo dominio, la funzione $f(x)$ *è strettamente crescente.*
Pertanto ammette solo una soluzione nell'intervallo $(-1, 0)$.



Quesito 9



Nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze", Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama scodella considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura.

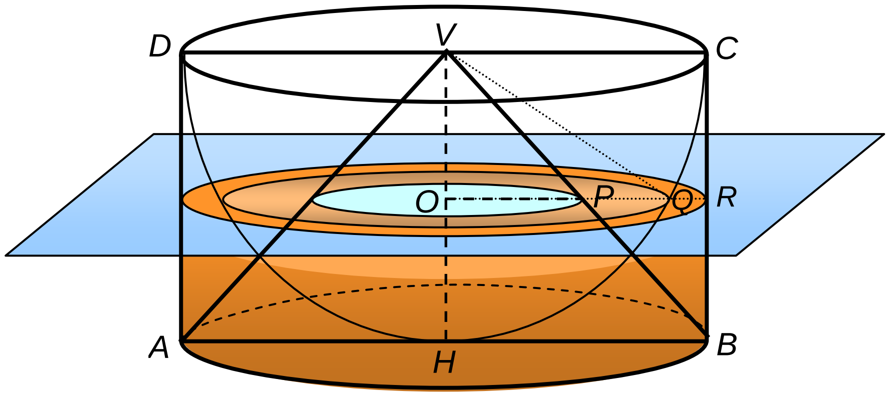
Soluzione

Riprendiamo innanzitutto il principio di Cavalieri:

"due solidi sono equivalenti se si può fissare un piano in modo che ogni altro piano parallelo a esso tagli i due solidi in sezioni equivalenti".

Consideriamo un piano parallelo alla base del cono, distante x dal vertice, cioè: $\overline{OV} = x$, *con* $0 \le x \le r$.

La sezione formata col cono è una circonferenza di raggio OP.



Essendo il triangolo $V\overset{\Delta}{O}P$ *un triangolo rettangolo isoscele, si ha:* $\overline{OV} = \overline{OP} = x$.

Pertanto la sezione del cono, a distanza x dal vertice, ha area: $S_1 = \pi \cdot x^2$.

Per trovare la sezione della scodella, che è una corona circolare di raggio esterno $\overline{OR} = r$, *occorre determinare il raggio interno* $\overline{OQ}$ *con il teorema di Pitagora.*

$$\overline{OQ} = \sqrt{\overline{QV}^2 - \overline{OV}^2} = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Pertanto la sezione della scodella, a distanza x dalla base, ha area:

$$S_2 = \pi \cdot \left(\overline{OR}^2 - \overline{OQ}^2\right) = \pi \cdot \left[r^2 - \left(r^2 - x^2\right)\right] = \pi \cdot x^2$$

In definitiva, poiché $S_1 = S_2 = \pi \cdot x^2$, *per il principio di Cavalieri, i due solidi sono equivalenti, cioè hanno lo stesso volume.*

Quesito 10

Si determini il periodo della funzione $f(x) = cos\,5x$.

Soluzione

Una funzione è periodica di periodo T, quando $f(x) = f(x + kT)$.

Essendo la funzione coseno periodica di periodo $T = 2\pi$, *si ha:*

$f(x) = cos\,5x = cos\,(5x + 2k\pi)$;

mentre $f(x + kT) = cos\,5(x + kT) = cos\,(5x + 5kT)$

Pertanto l'uguaglianza: $f(x) = f(x + kT)$ *diventa:*

$cos\,(5x + 2k\pi) = cos\,(5x + 5kT)$ da cui si ottiene:

$5x + 2k\pi = 5x + 5kT$; $2k\pi = 5kT$; $2\pi = 5T$; $T = \dfrac{2\pi}{5}$.