ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Sessione Ordinaria 2008

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 1

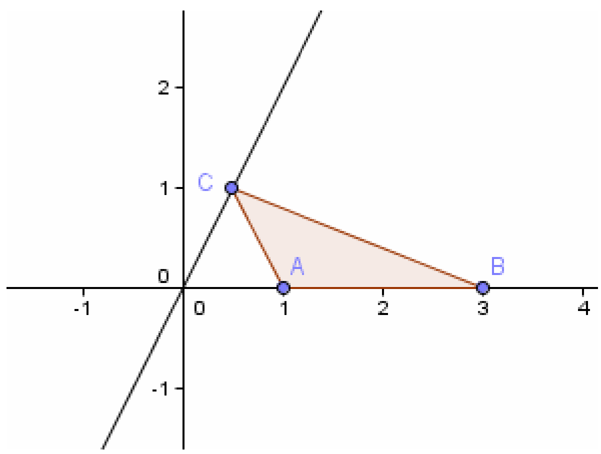
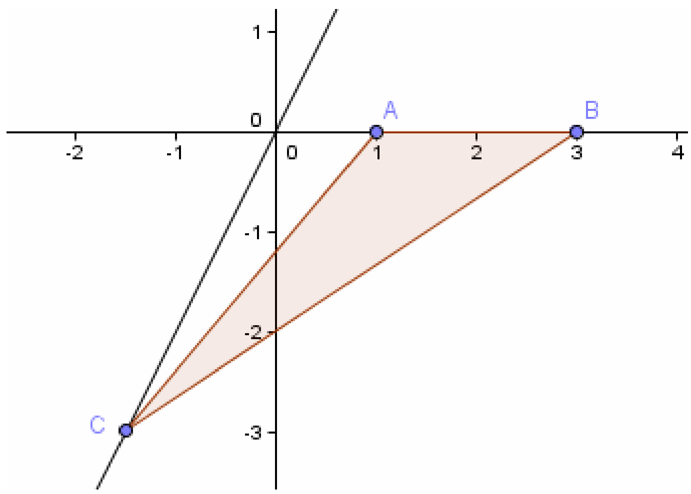
Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $A(1;0)$, $B(3;0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y = 2x$.

1. Si provi che i punti $(1;2)$ e $\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.
3. Si calcoli l'area Ω della parte di piano delimitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.
4. Verificato che è $\Omega = \frac{3}{2}\cdot(\log 3 - 1)$ si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

Punto 1 - metodo 1

Il punto C appartenente alla retta $y = 2x$ ha coordinate: $C(x;2x)$.

Tale punto C può trovarsi nel semipiano positivo delle x o nel semipiano negativo delle x (*vedi grafici*).

Caso A	*Caso B*
	

La condizione $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$ si traduce in $tg\, A\hat{C}B = \pm 1$ (il segno $\pm$ è dato dai due casi A e B, in cui l'angolo $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$ è costruito in verso orario (negativo) o in verso antiorario (positivo).

La relazione $tg\, A\hat{C}B = \pm 1$ diventa: $\boxed{\frac{m_{AC} - m_{BC}}{1 + m_{AC}\cdot m_{BC}} = \pm 1}$.

Essendo $m_{AC} = \frac{2x-0}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$ e $m_{BC} = \frac{2x-0}{x-3} = \frac{2x}{x-3}$ sostituendo si ha:

$$\frac{\frac{2x}{x-1}-\frac{2x}{x-3}}{1+\frac{2x}{x-1}\cdot\frac{2x}{x-3}}=\pm 1 \;;\quad \frac{\frac{2x\cdot(x-3)-2x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-3)}}{1+\frac{4x^2}{(x-1)\cdot(x-3)}}=\pm 1 \;;\quad \frac{\frac{2x^2-6x-2x^2+2x}{(x-1)\cdot(x-3)}}{\frac{x^2-4x+3+4x^2}{(x-1)\cdot(x-3)}}=\pm 1 \;;$$

$$\frac{\frac{-4x}{(x-1)\cdot(x-3)}}{\frac{5x^2-4x+3}{(x-1)\cdot(x-3)}}=\pm 1 \;;\quad \frac{-4x}{(x-1)\cdot(x-3)}\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-3)}{5x^2-4x+3}=\pm 1 \;;\quad \frac{-4x}{5x^2-4x+3}=\pm 1 \;;$$

da cui si ottengono:

$$\left|\begin{array}{l} -4x=5x^2-4x+3 \\ -4x=-5x^2+4x-3 \end{array}\right| \begin{array}{l} 5x^2+3=0 \\ 5x^2-8x+3=0 \end{array}\left|\begin{array}{l} n.s.r. \\ x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-15}}{5}=\frac{4\pm 1}{5}= \begin{array}{ll} x_1=\frac{3}{5} & \Rightarrow\; y_1=\frac{6}{5} \\ x_2=1 & \Rightarrow\; y_2=2 \end{array} \end{array}\right.$$

<u>*Punto 1 - metodo 2*</u>

Applicando il Teorema del coseno al triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$: $\boxed{\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\frac{\pi}{4}}$;

Essendo:
$$\overline{AC}=\sqrt{(x-1)^2+(2x-0)^2}=\sqrt{x^2+1-2x+4x^2}=\sqrt{5x^2-2x+1}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(x-3)^2+(2x-0)^2}=\sqrt{x^2+9-6x+4x^2}=\sqrt{5x^2-6x+9}$$
$$\overline{AB}=2$$

Si ha: $4=5x^2-2x+1+5x^2-6x+9-2\cdot\sqrt{(5x^2-2x+1)\cdot(5x^2-6x+9)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$4=10x^2-8x+10-\sqrt{(5x^2-2x+1)\cdot(5x^2-6x+9)}\cdot\sqrt{2} \;;$$

$$\sqrt{2(5x^2-2x+1)\cdot(5x^2-6x+9)}=10x^2-8x+6 \;;$$

$$\begin{cases} 10x^2-8x+6\geq 0 \\ 2\cdot(5x^2-2x+1)\cdot(5x^2-6x+9)=(10x^2-8x+6)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x\in R \\ 2\cdot(25x^4-30x^3+45x^2-10x^3+12x^2-18x+5x^2-6x+9)=100x^4+64x^2+36-160x^3+120x^2-96x \end{cases}$$

$$50x^4-60x^3+90x^2-20x^3+24x^2-36x+10x^2-12x+18=100x^4+64x^2+36-160x^3+120x^2-96x \;;$$

$$50x^4-80x^3+60x^2-48x+18=0 \;;\qquad 25x^4-40x^3+30x^2-24x+9=0$$

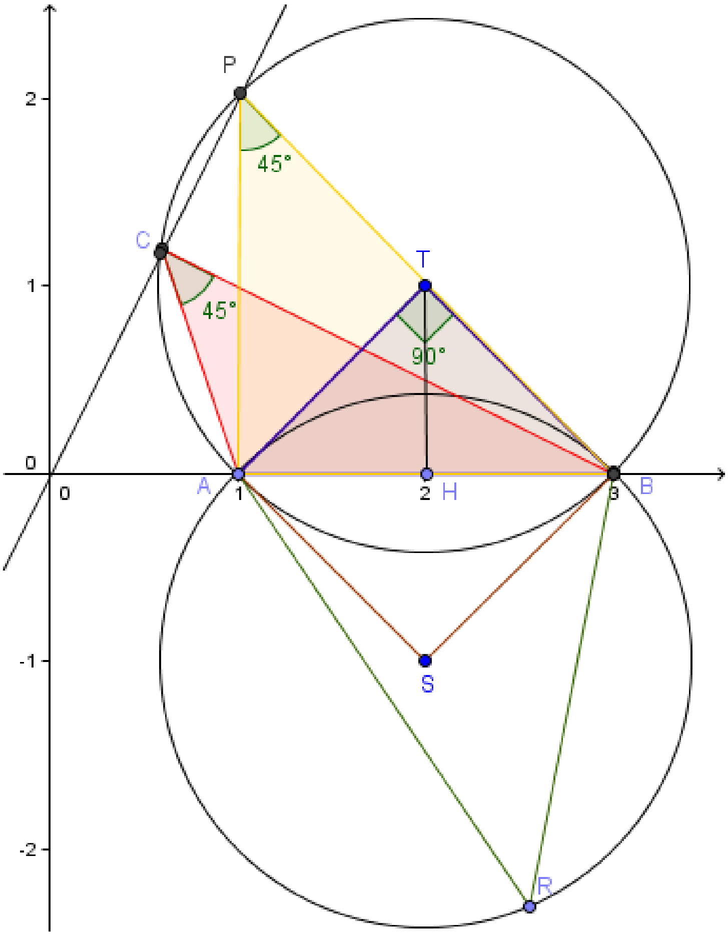
Applicando due volte il metodo di Ruffini (conoscendo già dalla traccia le soluzioni 1 e $\frac{3}{5}=0{,}6$) si ha:

	25	-40	30	-24	9
1		25	-15	15	-9
	25	-15	15	-9	0

	25	-15	15	-9
0,6		15	0	9
	25	0	15	0

$$(x-1)\cdot\left(x-\frac{3}{5}\right)\cdot(25x^2+15)=0 \;;\quad \begin{array}{lll} x-1=0 & x_1=1 & \Rightarrow\; y_1=\frac{6}{5} \\ x-\frac{3}{5}=0 & x_2=\frac{3}{5} & \Rightarrow\; y_2=2 \\ 25x^2+15=0 & n.s.r. & \end{array}$$

Punto 1 - metodo 3



Per un noto Teorema di Geometria, i punti che vedono il segmento $\overline{AB}$ sotto un angolo $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$ appartengono a una circonferenza il cui angolo al centro $A\hat{T}B = \frac{\pi}{2}$.

In realtà le circonferenze sono due, aventi centri nei punti T ed S.

Essendo $A\hat{T}B = \frac{\pi}{2}$ significa che il triangolo $A\overset{\triangle}{T}B$ è la metà di un quadrato avente diagonale $\overline{AB} = 2$.

Ciò significa che il lato $\overline{AT} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Inoltre i segmenti $\overline{TH} = 1$ ed $\overline{AH} = 1$.

Pertanto la prima circonferenza ha il centro nel punto $T(2;1)$ raggio $r = \sqrt{2}$ ed equazione
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$

Mentre la seconda circonferenza ha il centro nel punto $T(2;-1)$, raggio $r = \sqrt{2}$ ed equazione
$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$

Inoltre i punti richiesti devono appartenere alla retta $y = 2x$.

Per determinarli occorre quindi risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y = 2x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \\ y = 2x \end{cases}$$

Risolvendo il primo sistema si ha:

$$\begin{cases} x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 - 2y = 2 \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 4x^2 - 4x - 4x + 3 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 8x + 3 = 0 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-15}}{5} \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1,2} = \frac{4 \pm 1}{5} \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} \\ y_1 = \frac{6}{5} \end{cases} \; \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

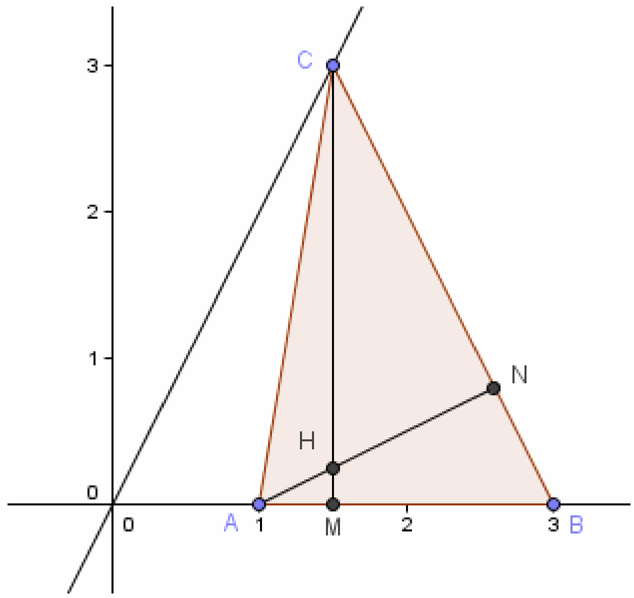
Risolvendo il secondo sistema si ha:

$$\begin{cases} x^2 + 4 - 4x + y^2 + 2y = 2 \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0 \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 4x^2 - 4x + 4x + 3 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$\begin{cases} 5x^2 + 3 = 0 \\ --- \end{cases}$ $n.s.r.$ (*dal grafico si vede infatti che la seconda circonferenza non tocca la retta* $y = 2x$)

Pertanto gli unici punti per cui è $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$ sono effettivamente $(1;2)$ e $\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$

Punto 2



Il punto C ha coordinate: $C(a;2a)$.
L'ortocentro è il punto d'incontro delle tre altezze.
L'altezza CM ha equazione: $x = a$,
con $a \neq 0$ (*per* $a = 0$ *il triangolo ABC è degenere*)

Il coefficiente angolare della retta BC è :

$$m_{BC} = \frac{2a-0}{a-3} = \frac{2a}{a-3}$$

Il coefficiente angolare della retta AN perpendicolare alla retta BC è : $m_{AN} = -\frac{a-3}{2a}$.

L'altezza AN ha equazione: $y - 0 = \frac{3-a}{2a} \cdot (x-1)$;

Le coordinate dell'ortocentro H sono:

$$\begin{cases} AN \\ CM \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{3-a}{2a} \cdot (x-1) \\ x = a \end{cases}$$

Eliminando il parametro a si ha: $y = \frac{3-x}{2x} \cdot (x-1)$

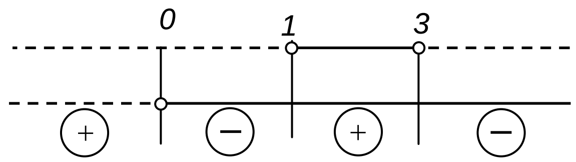
Pertanto il luogo geometrico γ ha equazione: $\boxed{y = \frac{-x^2+4x-3}{2x}}$

Il dominino di γ è: $Dom(\gamma) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.
Tocca l'asse x nei punti: $A(1;0)$ e $B(3;0)$

$$\begin{cases} y = \frac{-x^2+4x-3}{2x} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{1} = 2 \pm 1 = \begin{matrix} x_1 = 1 \\ \\ x_2 = 3 \end{matrix} \\ y = 0 \end{cases}$$

Il segno della funzione è:

$$f(x) > 0; \quad \frac{-x^2+4x-3}{2x} > 0 \qquad \begin{matrix} -x^2+4x-3>0 \\ 2x>0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1<x<3 \\ x>0 \end{matrix}$$



Gli asintoti sono:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+4x-3}{2x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2+4x-3}{2x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad x=0 \text{ è un asintoto verticale.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+4x-3}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+4}{2} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{non esiste l'asintoto orizzontale.}$$

Verifichiamo se esiste l'asintoto obliquo: $y = mx+q$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x^2+4x-3}{2x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+4x-3}{2x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right) \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2x+4}{4x} = \left(\frac{\infty}{\infty} = ?\right) \overset{H}{=}$$
$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

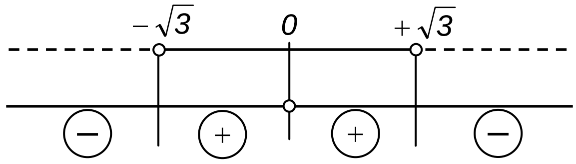
$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{-x^2+4x-3}{2x} + \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+4x-3+x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x-3}{2x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2} = 2.$$

Pertanto la retta $y = -\frac{1}{2}x + 2$ è un asintoto obliquo.

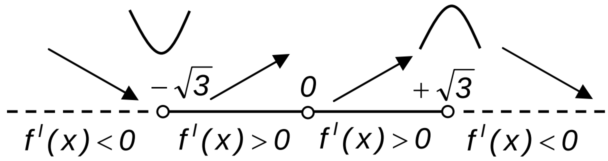
La derivata prima è: $f'(x)=\dfrac{(-2x+4)\cdot 2x-2\cdot(-x^2+4x-3)}{4x^2}=\dfrac{-4x^2+8x+2x^2-8x+6}{4x^2}=\dfrac{3-x^2}{2x^2}$.

$f'(x)=0;\quad \dfrac{3-x^2}{2x^2}=0;\quad 3-x^2=0;\quad x=\pm\sqrt{3}$

$f'(x)>0;\quad \dfrac{3-x^2}{2x^2}>0;\quad \begin{matrix} 3-x^2>0 & -\sqrt{3}<x<+\sqrt{3} \\ 2x^2>0 & \forall x\neq 0 \end{matrix}$



In definitiva il segno della derivata prima è il seguente:



In $x=-\sqrt{3}$ c'è un minimo relativo, mentre in $x=+\sqrt{3}$ c'è un max relativo.

Le ordinate dei punti di max e min relativi sono:

$$f(-\sqrt{3})=\frac{-3-4\sqrt{3}-3}{-2\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}+6}{3}=\sqrt{3}+2 \quad\Rightarrow\quad M(-\sqrt{3};2+\sqrt{3}).$$

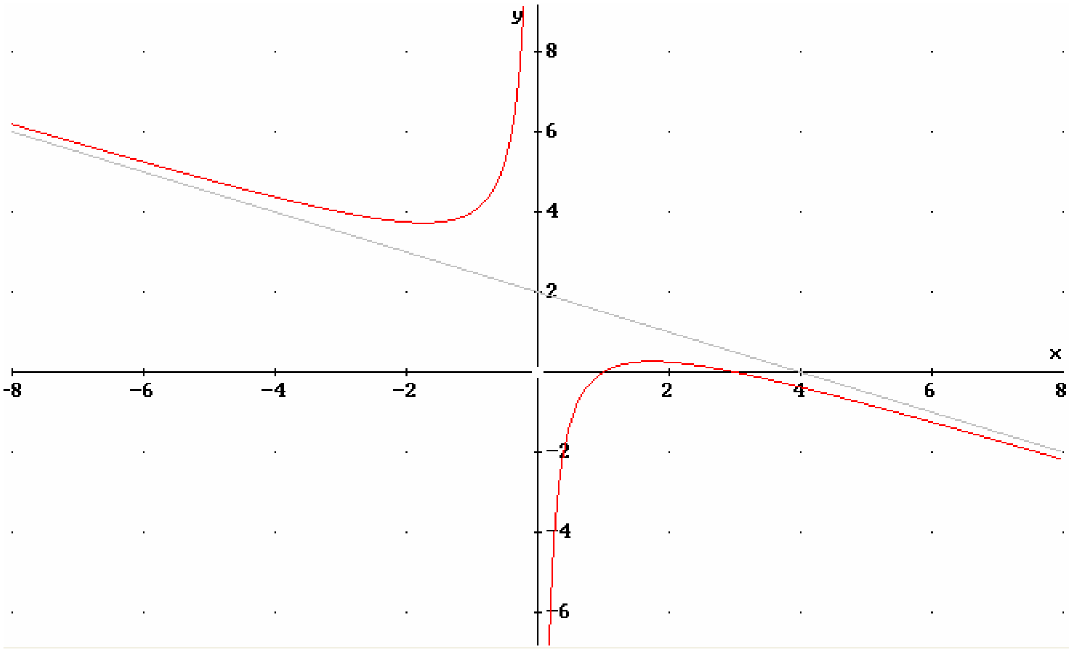
$$f(+\sqrt{3})=\frac{-3+4\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}}=\frac{-3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{-3\sqrt{3}+6}{3}=2-\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad M(\sqrt{3};2-\sqrt{3}).$$

La derivata seconda è: $f''(x)=\dfrac{-2x\cdot 2x^2-4x\cdot(3-x^2)}{4x^4}=\dfrac{-4x^3-12x+4x^3}{4x^4}=\dfrac{-12x}{4x^4}=\dfrac{-3}{x^3}$

La derivata seconda non si annulla mai.

$f''(x)>0;\quad \dfrac{-3}{x^3}>0;\quad x^3<0;\quad x<0.$

La curva non ha alcun punto di flesso.
la curva volge la concavità verso l'alto nell'intervallo $(-\infty,0)$.
la curva volge la concavità verso il basso nell'intervallo $(0,+\infty)$.



Nota 1

Il grafico della curva γ si può ottenere riscrivendo l'equazione: $y=\dfrac{-x^2+4x-3}{2x}$ nella forma:

$\boxed{y=-\dfrac{1}{2}x+2-\dfrac{3}{2x}}$ che rappresenta un'iperbole con asintoti le rette: $x=0$ e $y=-\dfrac{1}{2}x+2$.

Nota 2

Il grafico della curva γ si può ottenere anche riscrivendo l'equazione: $y=\dfrac{-x^2+4x-3}{2x}$ nella forma : $\boxed{x^2+2xy-4x+3=0}$.

La quale si trasforma in : $x^2+2xy+y^2-y^2+4-4+4y-4y-4x+3=0$;

$(x^2+y^2+4+2xy-4x-4y)-(y^2+4-4y)+3=0$;

$(x+y-2)^2-(y-2)^2+3=0$; $\quad (y-2)^2-(x+y-2)^2=3$; $\quad \dfrac{(y-2)^2}{3}-\dfrac{(x+y-2)^2}{3}=1$;

$\left(\dfrac{y-2}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\dfrac{x+y-2}{\sqrt{3}}\right)^2=1$ Applicando la trasformazione : $\begin{cases} X=\dfrac{x+y-2}{\sqrt{3}} \\ Y=\dfrac{y-2}{\sqrt{3}} \end{cases}$ l'equazione diventa :

$Y^2-X^2=1$ che rappresenta un'iperbole equilatera.

Punto 3

La tangente a γ nel punto $A(1;0)$ è : $\boxed{y=x-1}$

Infatti: $y-y_A=m_{t_A}\cdot(x-x_A)$; $\quad y-0=m_{t_A}\cdot(x-1)$; $\quad y=m_{t_A}\cdot(x-1)$

con il coefficiente angolare $m_{t_A}=f'(x=x_A)=\dfrac{3-1^2}{2\cdot 1^2}=1$

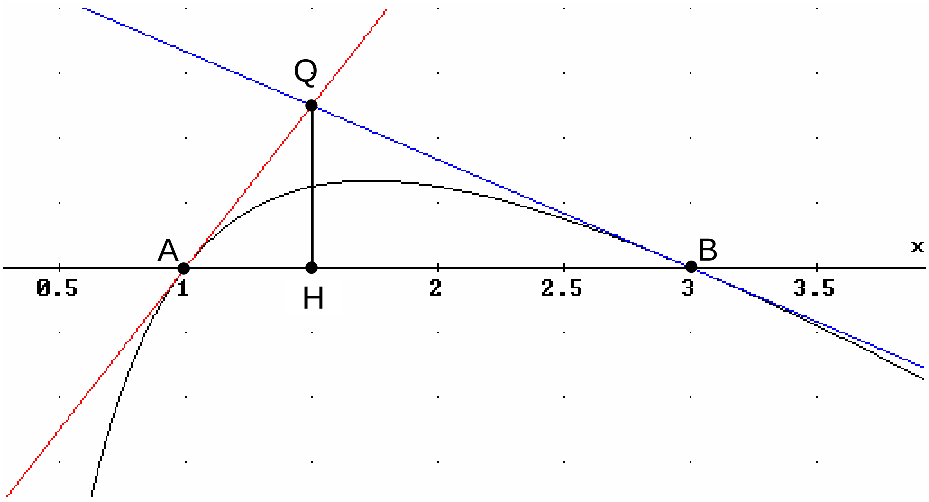
La tangente a γ nel punto $B(3;0)$ è : $\boxed{y=-\dfrac{1}{3}x+1}$

Infatti: $y-y_B=m_{t_B}\cdot(x-x_B)$; $\quad y-0=m_{t_B}\cdot(x-3)$; $\quad y=m_{t_B}\cdot(x-3)$

con il coefficiente angolare $m_{t_B}=f'(x=x_B)=\dfrac{3-3^2}{2\cdot 3^2}=\dfrac{-6}{18}=-\dfrac{1}{3}$

Le due tangenti si incontrano nel punto:

$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{3}x+1 \\ y=x-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x-1=-\dfrac{1}{3}x+1 \\ \_\_\_ \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x-3+x-3=0 \\ \_\_\_ \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x=6 \\ \_\_\_ \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{Q\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)}$



L'area della parte di piano richiesta è: $\Omega=\frac{1}{2}AB\cdot QH-\int_1^3\left[\frac{-x^2+4x-3}{2x}\right]dx$.

L'integrale indefinito $\int\left[\frac{-x^2+4x-3}{2x}\right]dx \;=\; \int\left[-\frac{1}{2}x+2-\frac{3}{2x}\right]dx \;=\; -\frac{x^2}{4}+2x-\frac{3}{2}\log x+c$.

Pertanto: $\Omega=\frac{1}{2}AB\cdot QH-\int_1^3\left[\frac{-x^2+4x-3}{2x}\right]dx \;=\; \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-\left[-\frac{x^2}{4}+2x-\frac{3}{2}\log x\right]_1^3 \;=$

$$=\frac{1}{2}-\left[\left(-\frac{3^2}{4}+2\cdot 3-\frac{3}{2}\log 3\right)-\left(-\frac{1^2}{4}+2\cdot 1-\frac{3}{2}\log 1\right)\right] \;=\; \frac{1}{2}-\left[-\frac{9}{4}+6-\frac{3}{2}\log 3+\frac{1}{4}-2\right] \;=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[2-\frac{3}{2}\log 3\right] \;=\; \frac{1}{2}-2+\frac{3}{2}\log 3 \;=\; -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\log 3 \;=\; \boxed{\frac{3}{2}\cdot(\log 3-1)}.$$

oppure

L'area $\Omega=\int_1^{\frac{3}{2}}\left[(x-1)-\frac{-x^2+4x-3}{2x}\right]dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left[\left(-\frac{1}{3}x+1\right)-\frac{-x^2+4x-3}{2x}\right]dx \;=$

$$=\int_1^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3x^2-6x+3}{2x}\right]dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left[\frac{x^2-6x+9}{6x}\right]dx \;=\; \int_1^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3}{2}x-3+\frac{3}{2x}\right]dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left[\frac{1}{6}x-1+\frac{9}{6x}\right]dx \;=$$

$$=\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-3x+\frac{3}{2}\cdot\log x\right]_1^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}\cdot\log x\right]_{\frac{3}{2}}^{3} \;=$$

$$=\left[\left(\frac{27}{16}-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\cdot\log\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{3}{4}-3+0\right)\right]+\left[\left(\frac{3}{4}-3+\frac{3}{2}\cdot\log 3\right)-\left(\frac{3}{16}-\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\log\frac{3}{2}\right)\right] \;=$$

$$=\frac{27}{16}-\frac{9}{2}+\cancel{\frac{3}{2}\cdot\log\frac{3}{2}}-\cancel{\frac{3}{4}}+\cancel{3}+\cancel{\frac{3}{4}}-\cancel{3}+\frac{3}{2}\cdot\log 3-\frac{3}{16}+\frac{3}{2}-\cancel{\frac{3}{2}\cdot\log\frac{3}{2}} \;=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\log 3+\frac{27-72-3+24}{16} \;=\; \frac{3}{2}\cdot\log 3-\frac{24}{16} \;=\; \frac{3}{2}\cdot\log 3-\frac{3}{2} \;=\; \boxed{\frac{3}{2}\cdot(\log 3-1)}.$$

Punto 4

Essendo $\boxed{\log_e 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx}$, per calcolare un valore approssimato di $\log_e 3$ si può utilizzare uno dei seguenti metodi:

Metodo dei rettangoli

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{x_n - x_0}{n}\cdot\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right] \qquad \text{oppure} \qquad \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{x_n - x_0}{n}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]$$

Metodo dei trapezi

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{x_n - x_0}{n}\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Metodo delle parabole

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{1}{3}\cdot\frac{x_n - x_0}{n}\cdot\left[f(x_0)+f(x_n)+4\cdot[f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{n-1})]+2\cdot[f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{n-2})]\right]$$

con n *numero pari.*

Utilizzando il *Metodo dei trapezi* e suddividendo l'intervallo $(1,3)$ nei 4 intervallini:

$\left(1,\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2},2\right)$, $\left(2,\frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2},3\right)$

applicando la formula: $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{x_n - x_0}{n}\cdot\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$ si ottiene:

$$\log_e 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}dx \cong \frac{3-1}{4}\cdot\left[\frac{f(1)+f(3)}{2} + \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\right].$$

essendo:

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1 \qquad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \qquad f(2) = \frac{1}{2} \qquad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} \qquad f(3) = \frac{1}{3}$$

si ottiene:

$$\log_e 3 = \int_1^3 \frac{1}{x}dx \cong \frac{3-1}{4}\cdot\left[\frac{f(1)+f(3)}{2} + \sum_{i=1}^{3} f(x_i)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{3}}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\frac{4}{3}}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{20+20+15+12}{30}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{67}{30} = \boxed{\frac{67}{60}} \cong 1{,}1\,.$$

L'errore commesso è maggiorato dal valore $E_n = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2$

(*con* M_2 *valore massimo della funzione* $|f''(x)|$ *nell'intervallo* $[a,b]$)

Nel nostro caso: $n = 4$, $a = 1$, $b = 3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f''(x)$ nell'intervallo $[1,3]$ è una funzione strettamente decrescente. Infatti $f'''(x) = -\frac{6}{x^4} < 0 \quad \forall x \in R$.

Pertanto $f''(x)$ assume il valore max nell'intervallo $[1,3]$ nell'estremo $x = 1 \Rightarrow M_2 = f''(x=1) = \frac{2}{1^3} = 2$

L'errore commesso è maggiorato pertanto dal valore $E_4 = \frac{(3-1)^3}{12\cdot 4^2}\cdot 2 = \frac{2^3}{12\cdot 16}\cdot 2 = \frac{1}{12}$.