ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2007

CORSO DI ORDINAMENTO

Questionario

Quesito 9

L'integrale $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ può essere calcolato utilizzando il metodo di integrazione per parti:

$$\int \left[f'(x) \cdot g(x) \right] dx = f(x) \cdot g(x) - \int \left[f(x) \cdot g'(x) \right] dx \;,$$

ponendo $\begin{array}{l} f'(x) = 1 \\ g(x) = \sqrt{1-x^2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f(x) = x \\ g'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \quad \Rightarrow$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x \cdot \sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \text{razionalizzando}$$

$$= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \frac{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x - \int \sqrt{1-x^2}\, dx \;.$$

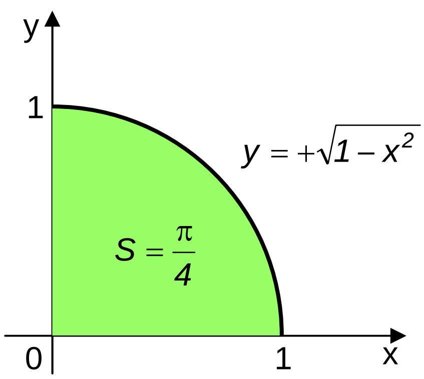
Pertanto si è ottenuto che: $\int \sqrt{1-x^2}\, dx = x \cdot \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x - \int \sqrt{1-x^2}\, dx$; cioè:

$2 \int \sqrt{1-x^2}\, dx = x \cdot \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x$; dividendo per 2 si ottiene:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x \cdot \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x \right] + k$$

L'integrale definito:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x \cdot \sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{\pi}{4}$$



Geometricamente la curva di equazione $y = +\sqrt{1-x^2}$ nell'intervallo $(0;1)$ rappresenta la quarta parte di un cerchio di raggio unitario.

Osservazione

Se la traccia avesse chiesto di calcolare l'integrale definito $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ *anziché quello indefinito* $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ *esso poteva essere calcolato anche con il metodo di sostituzione.*

Infatti ponendo $x = \operatorname{sen} t$ *si ottiene:* $dx = \cos t \cdot dt$ *e* $\begin{array}{l} x = 0 \to t = 0 \\ x = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \end{array}$ $\Rightarrow$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t \cdot dt =$$

Nell'intervallo $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ *la funzione* $y = \cos t$ *è positiva* $\Rightarrow$ $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = |\cos t| = \cos t$

Questa sostituzione non poteva essere effettuata per l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ *, poiché* $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = |\cos t| = \pm \cos t$ **.**

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} \cdot \cos t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt .$$

Essendo $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}$ $\Rightarrow$ $\cos t = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$ $\Rightarrow$ $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ $\Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt = \frac{1}{2} \cdot \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right] + k =$$

Avendo posto $x = \operatorname{sen} t$ *si ha:* $t = \operatorname{arcsen} x$ *(nell'integrale indefinito, la funzione* $x = \operatorname{sen} t$ *non era invertibile, perché non si era a conoscenza degli estremi di integrazione).*

Inoltre $\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cdot \cos t = 2 \operatorname{sen} t \cdot \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$.

Pertanto: $\frac{1}{2} \cdot \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right] + k = \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{1-x^2} \right] + k =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2} \right] + k .$$