Studio del grafico della funzione: $\boxed{f(x) = e^{\frac{2x+5}{4+6x}}}$

1. Dominio

   $f(x)$ è una funzione trascendente *(esponenziale con esponente una funzione razionale fratta)*.

   Essa è definita e continua in $D_f = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

   Infatti dalla condizione: $4 + 6x \neq 0$ si ha: $x \neq -\frac{2}{3}$.

2. Simmetrie

   $f(x)$ non presenta simmetrie evidenti. Infatti:

   $$f(-x) = e^{\frac{2\cdot(-x)+5}{4+6\cdot(-x)}} = e^{\frac{-2x+5}{4-6x}} = e^{\frac{2x-5}{-4+6x}} \neq \begin{cases} +f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

   $f(x)$ *non è né pari* (simmetrica rispetto all'asse y) *né dispari* (simmetrica rispetto all'origine).

3. Intersezioni con gli assi cartesiani

   $f(x)$ interseca gli assi cartesiani solo nel punto $A\left(0; e^{\frac{5}{4}}\right)$. Infatti:

   $$\begin{cases} y = e^{\frac{2x+5}{4+6x}} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = e^{\frac{5}{4}} \cong 3{,}49 \\ x = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y = e^{\frac{2x+5}{4+6x}} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{\frac{2x+5}{4+6x}} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} impossibile \\ y = 0 \end{cases}$$

4. Segno di f (x)

   Trattandosi di una funzione esponenziale, è sempre positiva nel suo Dominio.

5. Limiti ed asintoti

   $$\lim_{x \to \left(-\frac{2}{3}\right)^-} e^{\frac{2x+5}{4+6x}} = 0^+ \qquad\qquad \lim_{x \to \left(-\frac{2}{3}\right)^+} e^{\frac{2x+5}{4+6x}} = +\infty$$

   $$2x+5 \to +\frac{11}{3}, \quad 4+6x \to 0^-, \quad \frac{2x+5}{4+6x} \to -\infty \qquad\qquad 2x+5 \to +\frac{11}{3}, \quad 4+6x \to 0^+, \quad \frac{2x+5}{4+6x} \to +\infty$$

   Pertanto la retta verticale $x = -\frac{2}{3}$ è un asintoto verticale destro per la curva.

   $$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2x+5}{4+6x}} = e^{\frac{+\infty}{+\infty}} = ?$$

   $$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2x+5}{4+6x}} = e^{\frac{2}{6}} = \sqrt[3]{e}\,. \qquad Essendo \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{4+6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{5}{x}}{\frac{4}{x}+6} = \frac{1}{3}.$$

   $$\frac{5}{x} \to 0, \quad \frac{4}{x} \to 0$$

   $$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2x+5}{4+6x}} = e^{\frac{-\infty}{-\infty}} = ?$$

   $$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{2x+5}{4+6x}} = e^{\frac{2}{6}} = \sqrt[3]{e}\,. \qquad Essendo \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{4+6x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{5}{x}}{\frac{4}{x}+6} = \frac{1}{3}.$$

   $$\frac{5}{x} \to 0, \quad \frac{4}{x} \to 0$$

   Pertanto la retta $y = \sqrt[3]{e}$ è un asintoto orizzontale per la curva.

6. Derivata prima

$$f^{I}(x)=\frac{2\cdot(4+6x)-(2x+5)\cdot 6}{(4+6x)^2}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=\frac{8+12x-12x-30}{(4+6x)^2}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=\frac{-22}{(4+6x)^2}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}\ .$$

7. Zeri della derivata prima

$$f^{I}(x)=0\ ;\qquad \frac{-22}{(4+6x)^2}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=0$$

$$\frac{-22}{(4+6x)^2}=0 \qquad -22=0 \qquad \textit{impossibile}$$

$$e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=0 \qquad e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=0 \qquad \textit{impossibile}$$

Non ci sono punti a tangente orizzontale.

8. Segno della derivata prima

$$f^{I}(x)>0\ ;\qquad \frac{-22}{(4+6x)^2}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}>0$$

$$-22>0 \qquad \textit{impossibile}$$

$$(4+6x)^2>0 \qquad \forall x\in D_f$$

$$e^{\frac{2x+5}{4+6x}}>0 \qquad \forall x\in D_f$$

	$-\frac{2}{3}$	
$-$		$-$
$+$		$+$
$+$		$+$
$-$		$-$

La funzione è sempre decrescente in tutto il suo Dominio.

9. Derivata seconda

$$f^{II}(x)=\frac{0\cdot(4+6x)^2+22\cdot 2\cdot(4+6x)\cdot 6}{(4+6x)^4}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}+\frac{-22}{(4+6x)^2}\cdot\frac{-22}{(4+6x)^2}e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=$$

$$=\frac{264\cdot(4+6x)}{(4+6x)^4}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}+\frac{484}{(4+6x)^4}e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=\left[\frac{1056+1584x}{(4+6x)^4}+\frac{484}{(4+6x)^4}\right]\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=$$

$$=\frac{1540+1584x}{(4+6x)^4}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}\ .$$

10. Zeri della derivata seconda

$$f^{II}(x)=0\ ;\qquad \frac{1540+1584x}{(4+6x)^4}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=0$$

$$\frac{1540+1584x}{(4+6x)^4}=0 \qquad 1540+1584x=0 \qquad x=-\frac{35}{36}$$

$$e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=0 \qquad e^{\frac{2x+5}{4+6x}}=0 \qquad \textit{impossibile}$$

11. Segno della derivata seconda

$$f^{II}(x)>0\ ;\qquad \frac{1540+1584x}{(4+6x)^4}\cdot e^{\frac{2x+5}{4+6x}}>0$$

$$\frac{1540+1584x}{(4+6x)^4}>0 \qquad \begin{array}{l}1540+1584x>0\\ 4+6x\neq 0\end{array}$$

$$e^{\frac{2x+5}{4+6x}}>0 \qquad e^{\frac{2x+5}{4+6x}}>0$$

$$x>-\frac{35}{36} \qquad\qquad x>-\frac{35}{36}$$

$$x\neq-\frac{2}{3} \qquad\qquad \forall x\in D_f$$

$$\forall x\in D_f \qquad\qquad \forall x\in D_f$$

	$-\frac{35}{36}$		$-\frac{2}{3}$	
$-$		$+$		$+$
$+$		$+$		$+$
$+$		$+$		$+$
$-$		$+$		$+$

$f(x)$ volge la concavità verso l'alto in: $\left(-\frac{35}{36},-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3},\ +\infty\right)$.

$f(x)$ volge la concavità verso il basso in: $\left(-\infty,\ -\frac{35}{36}\right)$.

Pertanto in $x=-\frac{35}{36}$ la curva ha un flesso a tangente obliqua, e risulta:

$$f\left(-\frac{35}{36}\right)=e^{\frac{2\cdot\left(-\frac{35}{36}\right)+5}{4+6\cdot\left(-\frac{35}{36}\right)}}=e^{\frac{-\frac{70}{36}+5}{4-\frac{210}{36}}}=e^{\frac{\frac{110}{36}}{-\frac{66}{36}}}=e^{-\frac{110}{36}\cdot\frac{36}{66}}=e^{-\frac{5}{3}}\cong 0{,}19\quad\Rightarrow\quad F\left(-\frac{35}{36};e^{-\frac{5}{3}}\right)\equiv(-0{,}97;0{,}19)$$

12. Massimi e minimi assoluti

La funzione è limitata inferiormente, *(senza avere un punto di minimo assoluto),* ma non è limitata superiormente.

13. Grafico