Studio del grafico della funzione: $\boxed{f(x) = -\sqrt[3]{5x^2 - x^3}}$

1. Dominio

   $f(x)$ è una funzione irrazionale avente indice dispari. Pertanto è una funzione definita e continua in $(-\infty, +\infty)$.

   Conviene riscrivere la funzione nel modo seguente: $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2}}$

2. Simmetrie

   $f(x)$ non presenta simmetrie evidenti. Infatti:

   $$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 - 5(-x)^2} = \sqrt[3]{-x^3 - 5x^2} \neq \left\langle \begin{array}{l} +f(x) \\ -f(x) \end{array} \right.$$

   $f(x)$ *non è né pari* (simmetrica rispetto all'asse y) *né dispari* (simmetrica rispetto all'origine).

3. Intersezioni con gli assi cartesiani

   $f(x)$ interseca gli assi cartesiani in $O(0;0)$ e $A(5;0)$. Infatti:

   $$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \sqrt[3]{0^3 - 5 \cdot 0^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - 5x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \cdot (x-5) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{array} \right. \\ y = 0 \end{cases}$$

4. Segno di f (x)

   $f(x) > 0$ in $(5, +\infty)$ $\qquad$ $f(x) < 0$ in $(-\infty, 0) \cup (0, 5)$. Infatti:

   $\sqrt[3]{x^3 - 5x^2} > 0$; $\quad x^3 - 5x^2 > 0$; $\quad x^2 \cdot (x-5) > 0$;

   $$\begin{array}{l} x^2 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x > 5 \end{array}$$

   | + | 0 | + | 5 | + |
   |---|---|---|---|---|
   | − | | − | | + |
   | − | | − | | + |

5. Limiti ed asintoti

   $$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 5x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x}} = \pm\infty. \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ non ha asintoti orizzontali.}$$

   (con $\frac{5}{x} \to 0$)

   Verifichiamo se $f(x)$ ha asintoti obliqui del tipo $y = mx + q$:

   $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 5x^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x}} = 1.$$

   $$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 - 5x^2} - 1x\right] =$$

   Ricordando il prodotto notevole: $(I - II) \cdot (I^2 + I \cdot II + II^2) = (I^3 - II^3)$ si ha:

   $$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 - 5x^2} - x\right] \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2}\right)^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 5x^2} + x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2}\right)^2 + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 5x^2} + x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2}\right)^3 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 5x^2)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 5x^2} + x^2} =$$

   $$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 5x^2 - x^3}{\sqrt[3]{x^6 - 10x^5 + 25x^4} + x \cdot x \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x}} + x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-5x^2}{x^2 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{10}{x} + \frac{25}{x^2}} + x^2 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x}} + x^2} =$$

   $$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-5x^2}{x^2 \cdot \left[\sqrt[3]{1 - \frac{10}{x} + \frac{25}{x^2}} + \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x}} + 1\right]} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-5}{\sqrt[3]{1 - \frac{10}{x} + \frac{25}{x^2}} + \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x}} + 1} = -\frac{5}{3}$$

Pertanto la curva ha l'asintoto obliquo di equazione: $y = x - \frac{5}{3}$

6. Derivata prima

Ricordando la regola: $D\sqrt[n]{[f(x)]^p} = \frac{p \cdot f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{[f(x)]^{n-p}}}$ si ha:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (3x^2 - 10x)}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 5x^2)^{3-1}}} = \frac{3x^2 - 10x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 5x^2)^2}} = \frac{3x^2 - 10x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^6 - 10x^5 + 25x^4}} = \frac{x \cdot (3x - 10)}{3x \cdot \sqrt[3]{x^3 - 10x^2 + 25x}} =$$

$$= \frac{3x - 10}{3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x^2 - 10x + 25)}} = \frac{3x - 10}{3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x-5)^2}}.$$

Il campo di derivabilità della funzione derivata prima è: $Dom(f') = R - \{0; 5\}$.

In $x = 0$ e in $x = 5$ la funzione non è derivabile poiché in essi la funzione derivata prima non è definita.

Essendo $\lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{3x - 10}^{-10}}{3 \cdot \sqrt[3]{\underbrace{x}_{0^+}\underbrace{(x-5)^2}_{+25}}} = -\infty$ $\quad \lim_{x \to 0^-} \frac{\overbrace{3x - 10}^{-10}}{3 \cdot \sqrt[3]{\underbrace{x}_{0^-}\underbrace{(x-5)^2}_{+25}}} = +\infty$ $\Rightarrow$ il punto $O(0;0)$ è una cuspide.

Essendo $\lim_{x \to 5^+} \frac{\overbrace{3x - 10}^{+5}}{3 \cdot \sqrt[3]{\underbrace{x}_{+5}\underbrace{(x-5)^2}_{0^+}}} = +\infty$ $\quad \lim_{x \to 5^-} \frac{\overbrace{3x - 10}^{+5}}{3 \cdot \sqrt[3]{\underbrace{x}_{+5}\underbrace{(x-5)^2}_{0^+}}} = +\infty$ $\Rightarrow$ il punto $A(5;0)$ è un flesso a tangente verticale.

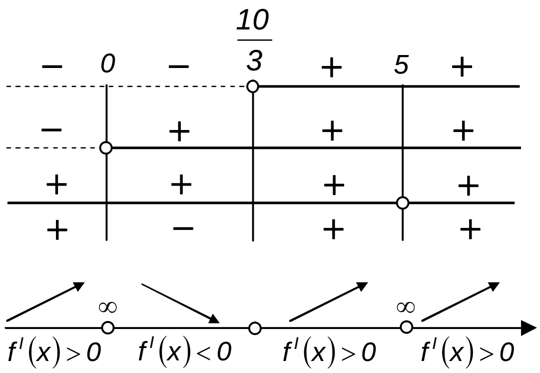
7. Zeri della derivata prima

$$f'(x) = 0; \quad \frac{3x - 10}{3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x-5)^2}} = 0; \quad 3x - 10 = 0; \quad x = \frac{10}{3}.$$

8. Segno della derivata prima

$$f'(x) > 0; \quad \frac{3x - 10}{3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x-5)^2}} > 0; \quad \begin{cases} 3x - 10 > 0 \\ \sqrt[3]{x \cdot (x-5)^2} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{10}{3} \\ x \cdot (x-5)^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{10}{3} \\ x > 0 \\ (x-5)^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{10}{3} \\ x > 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases}$$



Pertanto $f'(x) > 0$ negli intervalli $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{10}{3}, 5\right) \cup (5, +\infty)$,

mentre $f'(x) < 0$ nell'intervallo $\left(0, \frac{10}{3}\right)$.

Ne segue che $x = \frac{10}{3}$ è un punto di minimo relativo.

$$f\left(\frac{10}{3}\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{10}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1000}{27} - 5 \cdot \frac{100}{9}} = \sqrt[3]{\frac{1000}{27} - \frac{500}{9}} = \sqrt[3]{\frac{1000 - 1500}{27}} = -\sqrt[3]{\frac{500}{27}} = -2{,}65$$

Il punto di minimo relativo ha coordinate: $M = \left(\frac{10}{3}; -\sqrt[3]{\frac{500}{27}}\right)$

9. <u>Derivata seconda</u>

Considerando la derivata prima scritta nella forma $f^{I}(x) = \dfrac{3x-10}{3\cdot\sqrt[3]{x^3-10x^2+25x}}$ si ha:

$$f^{II}(x) = \frac{3\cdot 3\cdot\sqrt[3]{x^3-10x^2+25x}-(3x-10)\cdot 3\cdot\dfrac{1\cdot\left(3x^2-20x+25\right)}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^3-10x^2+25x\right)^2}}}{\left(3\cdot\sqrt[3]{x^3-10x^2+25x}\right)^2} =$$

$$= \frac{9\cdot\sqrt[3]{x^3-10x^2+25x}+\dfrac{-9x^3+60x^2-75x+30x^2-200x+250}{\sqrt[3]{\left(x^3-10x^2+25x\right)^2}}}{9\cdot\sqrt[3]{\left(x^3-10x^2+25x\right)^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{9\cdot\left(x^3-10x^2+25x\right)-9x^3+60x^2-75x+30x^2-200x+250}{\sqrt[3]{\left(x^3-10x^2+25x\right)^2}}}{9\cdot\sqrt[3]{\left(x^3-10x^2+25x\right)^2}} =$$

$$= \frac{9x^3-90x^2+225x-9x^3+60x^2-75x+30x^2-200x+250}{9\cdot\sqrt[3]{\left(x^3-10x^2+25x\right)^4}} =$$

$$= \frac{-50x+250}{9\cdot\sqrt[3]{\left[x\cdot\left(x^2-10x+25\right)\right]^4}} = \frac{-50\cdot(x-5)}{9\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(x-5)^8}} = \frac{-50\cdot(x-5)}{9\cdot(x-5)\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(x-5)^5}} = \frac{-50}{9\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(x-5)^5}}.$$

10. <u>Zeri della derivata seconda</u>

$f^{II}(x)=0\,;\quad \dfrac{-50}{9\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(x-5)^5}}=0\,;\quad -50=0\,;$ mai. Pertanto non ci sono altri flessi oltre al flesso in $F(5;0)$.

11. <u>Segno della derivata seconda</u>

$f^{II}(x)>0\,;\quad \dfrac{-50}{9\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot(x-5)^5}}>0\,;\quad \begin{array}{l}-50>0\\ x^4\cdot(x-5)^5<0\end{array}\quad \begin{array}{l}-50>0\\ x^4>0\\ (x-5)^5>0\end{array}\;;\quad \begin{array}{l}mai\\ x\neq 0\\ x>5\end{array}$

| | | 0 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-50>0$ | − | | − | | − |
| $x^4>0$ | + | o | + | | + |
| $(x-5)^5>0$ | − | | − | o | + |
| | + | | + | | − |

La funzione volge la concavità verso il basso nell'intervallo $(5,+\infty)$.

La funzione volge la concavità verso l'alto negli intervalli $(-\infty,0)\cup(0,5)$.

12. <u>Massimi e minimi assoluti</u>

La funzione non è ne inferiormente ne superiormente limitata. Non ha pertanto ne un minimo assoluto ne un massimo assoluto.

13.Grafico