Esercizio 6 – Studio di funzione: $\boxed{f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}}$

1. Dominio

É una funzione irrazionale intera, definita in $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$.

Infatti: $x^2-4x+3=0$; $x_{1,2}=\dfrac{4\mp\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{4\mp 2}{2}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3\end{cases}$

da cui $x^2-4x+3\geq 0$ per $x\leq 1$; $x\geq 3$

2. Simmetrie

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-4\cdot(-x)+3}=\sqrt{x^2+4x+3}\neq\begin{cases}+f(x)\\ -f(x)\end{cases}$$

$f(x)$ non è né pari (simmetrica rispetto all'asse y) né dispari (simmetrica rispetto all'origine).

3. Intersezioni con gli assi cartesiani

$f(x)$ tocca gli assi nei punti: $A(1;0)$, $B(3;0)$ e $C(0;\sqrt{3})$.

Infatti: $\begin{cases} y=\sqrt{x^2-4x+3} \\ x=0\end{cases}$ $\begin{cases} y=\sqrt{3} \\ x=0\end{cases}$

$\begin{cases} y=\sqrt{x^2-4x+3} \\ y=0\end{cases}$ $\begin{cases} 0=\sqrt{x^2-4x+3} \\ -\end{cases}$ $\begin{cases} 0=x^2-4x+3 \\ -\end{cases}$ $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=3 \\ -\end{cases}$

4. Segno di f (x)

Essendo $f(x)$ una funzione irrazionale di indice pari, non è mai negativa nel suo dominio.

5. Limiti ed asintoti

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-4x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=+\infty.$$ Poiché $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0$ e $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x^2}=0$

$f(x)$ non ha asintoti orizzontali.

Verifichiamo se $f(x)$ ha asintoti obliqui del tipo $y=mx+q$:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}=$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{+x\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=+1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=-1\end{cases}$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3}-(+1)x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3}-x\right]=\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3}-(-1)x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3}+x\right]=\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3}-x\right]\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}+x}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} = \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3}+x\right]\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}-x}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} = \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+3}{|x|\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+3}{+x\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\left(-4+\dfrac{3}{x}\right)}{+x\cdot\left[\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right]} = \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x+3}{|x|\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x+3}{-x\cdot\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot\left(-4+\dfrac{3}{x}\right)}{-x\cdot\left[\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right]} = \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1} = \dfrac{-4}{2} = -2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4+\dfrac{3}{x}}{-\left[\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right]} = \dfrac{-4}{-2} = +2 \end{cases}$$

Pertanto esistono due asintoti obliqui:

un asintoto obliquo a destra di equazione: $y = x-2$

un asintoto obliquo a sinistra di equazione: $y = -x+2$

6. Derivata prima

$$f'(x) = \frac{2x-4}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{2\cdot(x-2)}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+3}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

Il campo di derivabilità della funzione derivata prima è: $Dom(f') = (-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

7. Zeri della derivata prima

$f'(x)=0;\quad \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}=0;\quad x-2=0;\quad x=2$ *[valore non accettabile perché* $2\notin Dom(f')$ *].*

Pertanto $f(x)$ *non ha punti estremanti.*

In $x=1$ *e in* $x=3$ *la funzione non è derivabile poiché in essi la funzione derivata prima non è definita.*

Essendo $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} = -\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}} = +\infty$, *in tali punti la curva ha una retta tangente parallela all'asse y.*

8. Segno della derivata prima

$$f'(x)>0;\quad \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}>0 \quad \begin{cases} x-2>0 \\ Dom(f') \end{cases} \quad \begin{cases} x>2 \\ x<1;\ x>3 \end{cases} \quad x>3$$

$$f'(x)<0;\quad \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}<0 \quad \begin{cases} x-2<0 \\ Dom(f') \end{cases} \quad \begin{cases} x<2 \\ x<1;\ x>3 \end{cases} \quad x<1$$

Pertanto $f(x)$ *è strettamente crescente nell'intervallo* $(3,+\infty)$,

mentre $f(x)$ *è strettamente decrescente nell'intervallo* $(-\infty,1)$.

9. Derivata seconda

$$f''(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-4x+3}-(x-2)\cdot\dfrac{2x-4}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+3}}}{\left(\sqrt{x^2-4x+3}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}-(x-2)\cdot\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}}{x^2-4x+3} =$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}-\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}}}{x^2-4x+3} = \frac{\dfrac{x^2-4x+3-x^2-4+4x}{\sqrt{x^2-4x+3}}}{x^2-4x+3} = \frac{\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}}{x^2-4x+3} =$$

$$=\frac{-1}{\left(x^2-4x+3\right)\cdot\sqrt{x^2-4x+3}}$$

10. Zeri della derivata seconda

$$f''(x)=0\,;\quad \frac{-1}{\left(x^2-4x+3\right)\cdot\sqrt{x^2-4x+3}}=0\,;\quad -1=0\,;\quad mai$$

11. Segno della derivata seconda

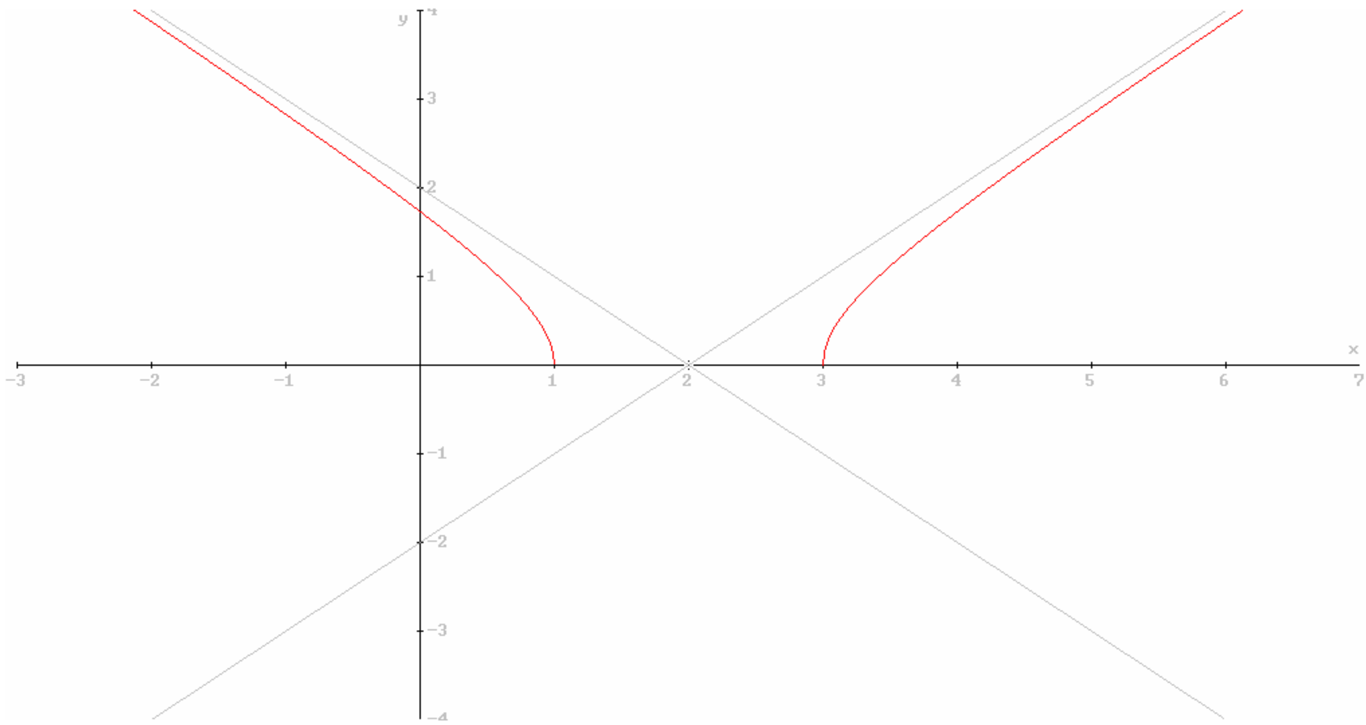
$$f''(x)>0\,;\quad \frac{-1}{\left(x^2-4x+3\right)\cdot\sqrt{x^2-4x+3}}>0\,;\quad -1>0\,;\quad mai$$

Essendo la derivata seconda sempre negativa, la funzione volge la concavità verso il basso in tutto il suo dominio.

La funzione è inferiormente limitata ma non superiormente limitata.

I punti $A(1;0)$ e $B(3;0)$ sono punti di minimo assoluto.

Il grafico è il seguente:



Osservazione

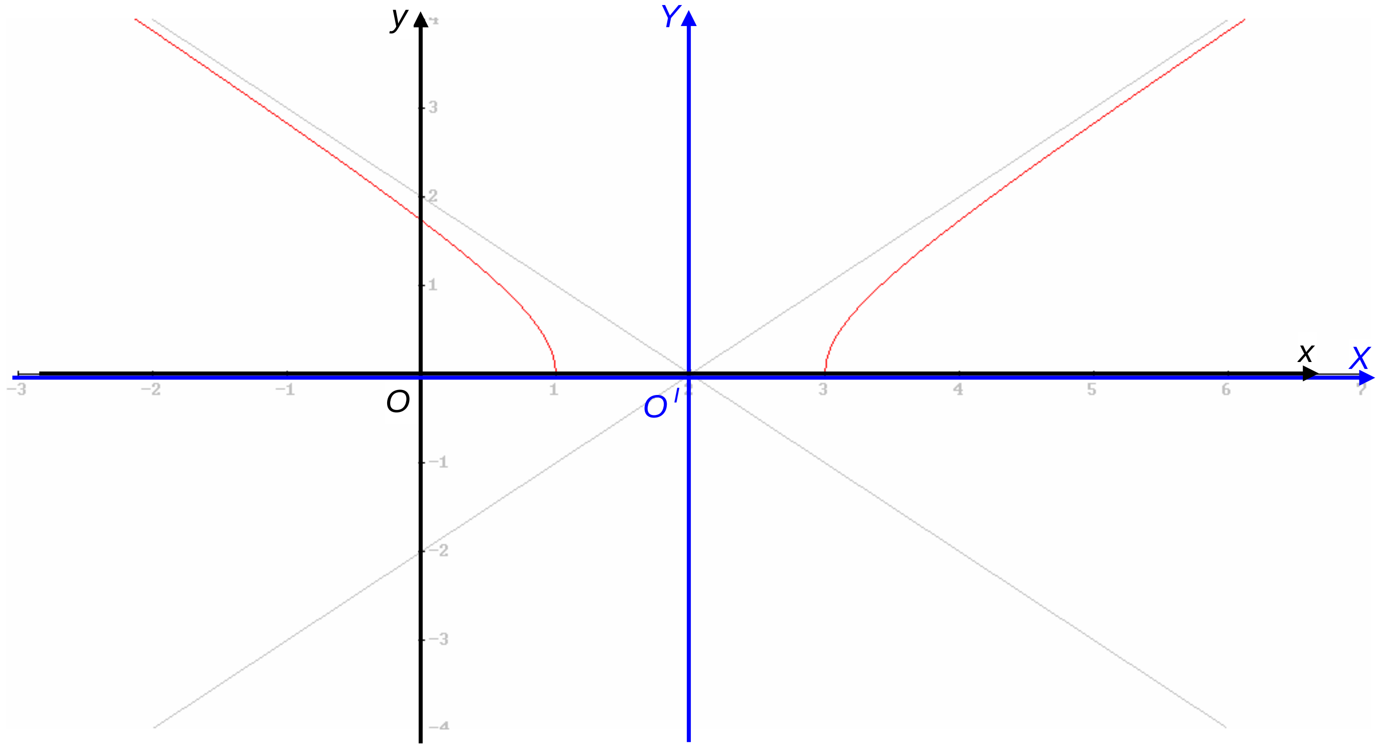
Il grafico della funzione $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ *può essere dedotto, in maniera più elegante e sintetica, utilizzando la geometria analitica.*

L'equazione $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ *è equivalente al sistema:*

$$\begin{cases} y^2=x^2-4x+3 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-y^2-4x+3=0 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2-4x+4)-4-y^2+3=0 \\ y\ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)^2-y^2=1 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Considerata la traslazione di assi: $\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y \end{cases}$ *si ottiene:* $\begin{cases} X^2-Y^2=1 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Le soluzioni di tale sistema sono i punti dell'iperbole equilatera $X^2-Y^2=1$ *posti nel semipiano* $y\ge 0$ *.*



In definitiva, il grafico della funzione $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ *è dato dai punti ad ordinata positiva dell'iperbole equilatera traslata avente centro di simmetria nel punto* $O^I(2;0)$ *.*