Studiare il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{|1-x|}{x^2}$

1. **DOMINIO :** $f(x)=\dfrac{|1-x|}{x^2}$ è una funz. razionale fratta di terzo grado, definita in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{x^2} & in\ (-\infty,0)\cup(0,1] \\[2ex] \dfrac{x-1}{x^2} & in\ (1,+\infty)\end{cases}$$

2. **SIMMETRIE :** $f(x)$ non presenta simmetrie
3. **INTERSEZIONI CON GLI ASSI :** $f(x)$ non tocca l'asse y e tocca l'asse x in x=1.
4. **SEGNO DI f (x) :** f (x) è sempre positiva poiché rapporto di due quantità positive.
5. **LIMITI ED ASINTOTI :**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{x}=\mathbf{0}\ \text{ poiché } \frac{1}{x}\to 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}=?\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{x}=\mathbf{0}\ \text{ poiché } \frac{1}{x}\to 0$$

Pertanto la retta y = 0 è un asintoto orizzontale per la curva.

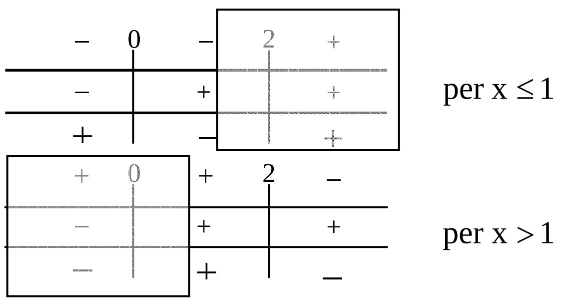
6. **DERIVATA PRIMA :**
7. $$f^{I}(x)=\begin{cases}\dfrac{-1\cdot x^2-2x\cdot(1-x)}{x^4}=\dfrac{x^2-2x}{x^4}=\dfrac{x\cdot(x-2)}{x^4}=\dfrac{x-2}{x^3} & \text{in } (-\infty,0)\cup(0,1) \\[2ex] \dfrac{1\cdot x^2-2x\cdot(x-1)}{x^4}=\dfrac{2x-x^2}{x^4}=\dfrac{x\cdot(2-x)}{x^4}=\dfrac{2-x}{x^3} & \text{in } (1,+\infty)\end{cases}$$

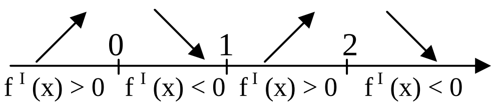
8. **ZERI DELLA DERIVATA PRIMA :**

$$f^{I}(x)=0;\ \begin{cases}\dfrac{x-2}{x^3}=0;\quad x-2=0;\quad x=2\quad \text{non accettabile perchè x deve} \in (-\infty,0)\cup(0,1) \\[2ex] \dfrac{2-x}{x^3}=0;\quad 2-x=0;\quad x=2\quad \text{accettabile perchè } x>1\end{cases}$$

9. **SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA :**

$$f^{I}(x)>0;\ \begin{cases}\dfrac{x-2}{x^3}>0; & \begin{matrix}x-2>0; & x>2 \\ x^3>0; & x>0\end{matrix} \\[2ex] \dfrac{2-x}{x^3}>0; & \begin{matrix}2-x>0; & x<2 \\ x^3>0; & x>0\end{matrix}\end{cases}$$





In x = 0 f(x) non è definita, in x = 1 c'e un min rel, in x = 2 c'è un max realtivo.

In $x = 1$ la funzione non è derivabile poiché la derivata destra è diversa dalla derivata sinistra, infatti:

$$f_-^I(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x^3} = -1 \qquad f_+^I(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2-x}{x^3} = 1$$

$$f(1) = \frac{1-1}{1^2} = 0 \implies M(1;0) \text{ min rel.} \qquad f(2) = \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4} \implies N\left(2;\frac{1}{4}\right) \text{ è un punto di max relativo.}$$

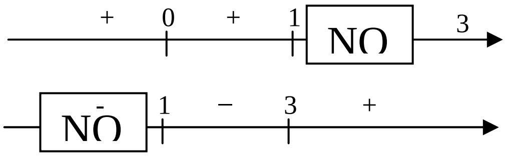
10. **DERIVATA SECONDA :**

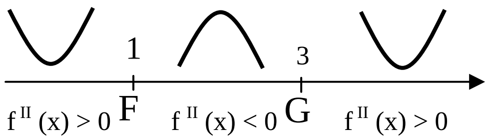
$$f^{II}(x) = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x-2)}{\left(x^3\right)^2} = \dfrac{6x^2 - 2x^3}{x^6} = \dfrac{2x^2 \cdot (3-x)}{x^6} = \dfrac{2 \cdot (3-x)}{x^4} & \text{in } (-\infty, 0) \cup (0,1) \\[2ex] \dfrac{-1 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (2-x)}{\left(x^3\right)^2} = \dfrac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \dfrac{2x^2 \cdot (x-3)}{x^6} = \dfrac{2 \cdot (x-3)}{x^4} & \text{in } (1, +\infty) \end{cases}$$

11. **ZERI DELLA DERIVATA SECONDA :** $f^{II}(x) = 0$; per $x = 3$

12. **SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA :**

$$f^{II}(x) > 0; \quad \begin{array}{lll} 3 - x > 0; & x < 3 & \text{da studiare in } (-\infty, 0) \cup (0,1) \\ x - 3 > 0; & x > 3 & \text{da studiare in } (1, +\infty) \end{array}$$





G è un punto di flesso
F non è un punto di flesso perché in F la funzione, abbiamo visto, non è derivabile.

$$Y_G = f(X_G) = f(3) = \frac{3-1}{9} = \frac{2}{9} \implies G\left(3;\frac{2}{9}\right) \text{ è un punto di flesso.}$$

La funzione è inferiormente limitata ma non superiormente limitata. Il codominio della funzione Il punto M è un punto di minimo assoluto. Il codominio della funzione è $[0, +\infty)$.