TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Teoria

Teorema di Weierstrass

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a\,,b]$	$\Rightarrow$	$f(x)$ assume nell'intervallo $[a\,,b]$ il minimo assoluto e il massimo assoluto.

Teorema dei valori intermedi

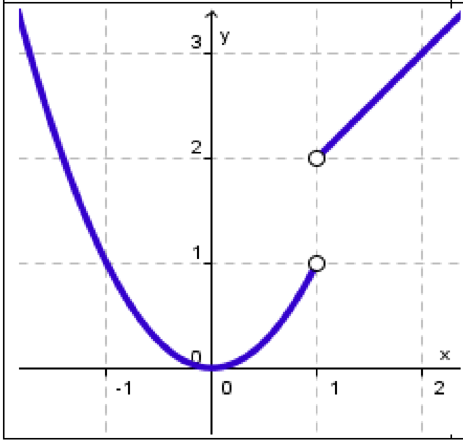
Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a\,,b]$	$\Rightarrow$	$f(x)$ assume, almeno una volta, nell'intervallo $[a\,,b]$, tutti i valori compresi tra il minimo assoluto e il massimo assoluto.

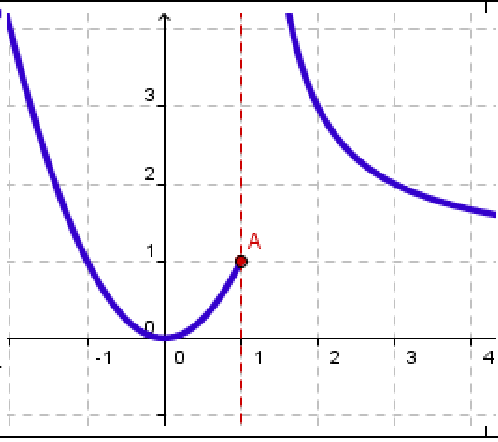
Teorema di esistenza degli zeri

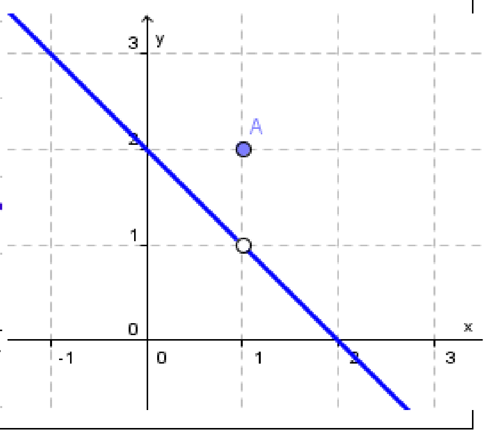
Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a\,,b]$ e negli estremi assume valori di segno opposto	$\Rightarrow$	Esiste almeno un punto $c \in\,]a\,,b[$ in cui $f(c) = 0$.

Tipi di discontinuità

Punti di discontinuità di prima specie	Punti di discontinuità di seconda specie	Punti di discontinuità di terza specie
Un punto x_0 è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ esistono finiti e sono diversi fra loro. $\lim\limits_{x\to {x_0}^+} f(x) = l^+ \neq \lim\limits_{x\to {x_0}^-} f(x) = l^+$ La differenza $\lvert l^+ - l^- \rvert$ è detta salto della funzione.	Un punto x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito oppure non esiste.	Un punto x_0 è un punto di discontinuità di terza specie per la funzione $f(x)$ quando: 1. Esiste finito il limite $lim_{x\to x_0}\, f(x) = l$ 2. $f(x)$ non è definita in x_0 oppure $f(x_0) \neq l$.

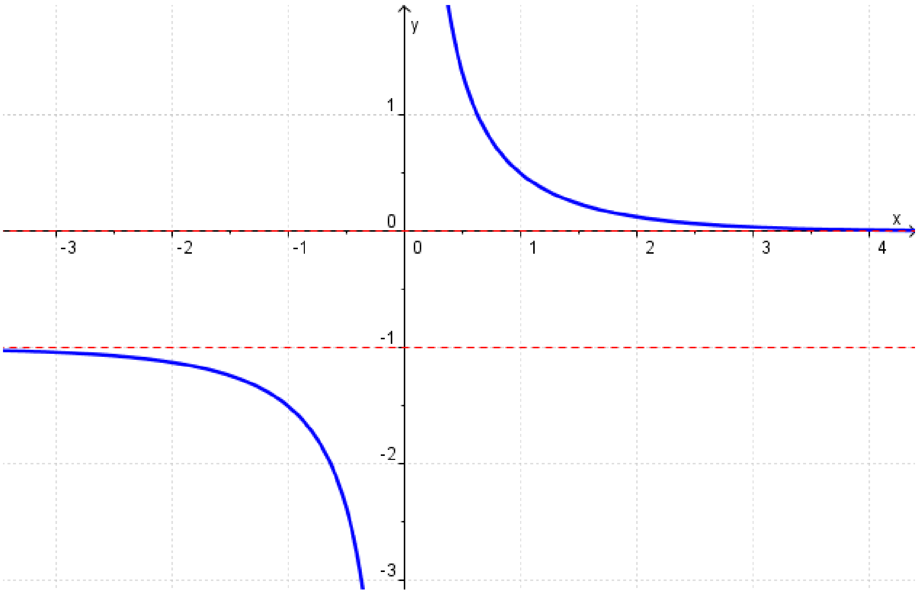






Esercizio 1278.499

Stabilisci se per la funzione $f(x) = \frac{1}{3^x - 1}$ vale il **Teorema di Weierstrass** nell'intervallo $[-1\,, 2]$.



La funzione $f(x) = \frac{1}{3^x - 1}$ non è continua nell'intervallo $[-1\,, 2]$.

$3^x - 1 = 0\,;\qquad 3^x = 1\,;\qquad x = 0\,.$

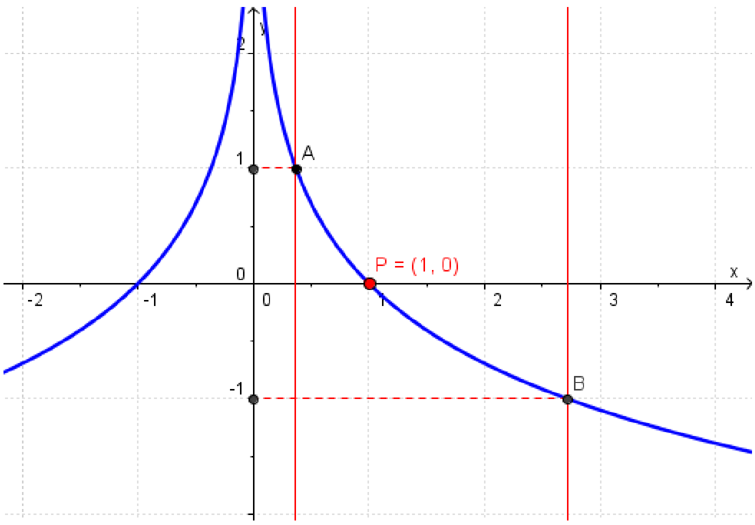
Infatti in $x = 0$ la funzione ha una discontinuità di II specie.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{3^x - 1} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{3^x - 1} = -\infty$

Esercizio 1278.510

Stabilisci se valgono le ipotesi del **Teorema di esistenza degli zeri** per la funzione $f(x) = -\ln|x|$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{e}\,, e\right]$.



La funzione $f(x) = -\ln|x|$ è definita e continua $\forall x \neq 0$.

Essendo $\frac{1}{e} \cong 0{,}37 \qquad e \cong 2{,}72$

si ha che $0 \notin \left[\frac{1}{e}\,, e\right]$

La funzione è pertanto, continua nell'intervallo chiuso e limitato $\left[\frac{1}{e}\,, e\right]$.

Inoltre:

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln\left|\frac{1}{e}\right| = -(\ln 1 - \ln e) = \ln e = 1 > 0$

$f(e) = -\ln|e| = -\ln e = -1 < 0$

Pertanto valgono le ipotesi del Teorema di esistenza degli zeri.

Esisterà pertanto, almeno un punto $c \in \,]a\,, b[$ in cui $f(c) = 0$.

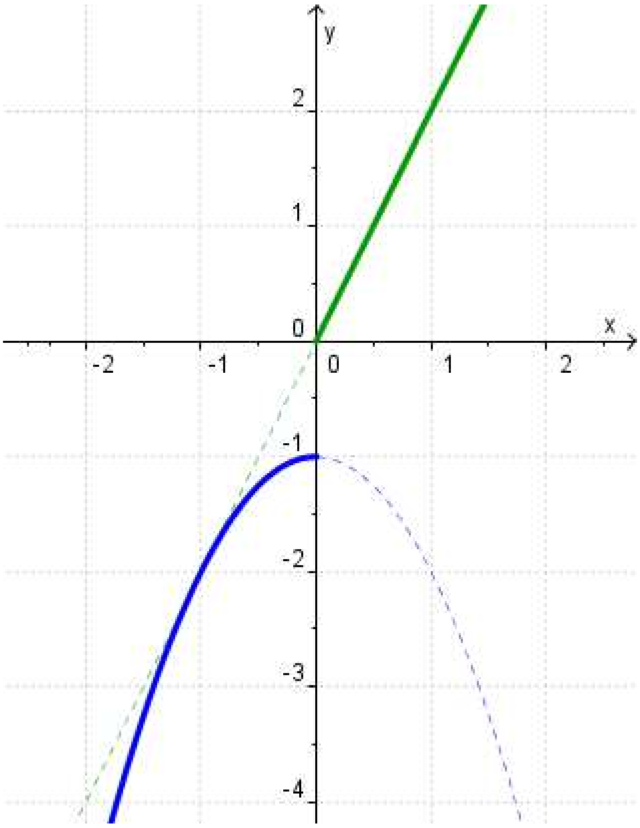
Nel nostro caso $c = 1$.

Disegna il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & se \;\; x \le 0 \\ 2x & se \;\; x > 0 \end{cases}$ e classifica i suoi punti di dicontinuità.

$y = -x^2 - 1$ è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, con il vertice in $V(0\,;\,-1)$.
Infatti: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\cdot(-1)} = 0 \qquad y_V = -0^2 - 1 = -1$

$y = 2x$ è una retta passante per l'origine, con coefficiente angolare $m = 2$.

Dal grafico di $f(x)$ si deduce che la funzione presenta una discontinuità di prima specie nel punto $x = 0$.
Il salto della funzione in tale punto vale
$|l^+ - l^-| = |0 - (-1)| = 1$.



Individua i punti di dicontinuità della funzione $f(x) = \frac{|x^2-16|}{x-4}$ e la relativa specie.

Il dominio della funzione è $D = \{x \in R \ / \quad x \neq 4\}$

La funzione è il quoziente di due funzioni continue. I suoi punti di discontinuità sono i punti in cui si annulla il denominatore. In questo caso $x = 4$ è un punto di discontinuità della funzione.

Stabiliamo il tipo di discontinuità.

La funzione può essere esplicitata nella forma:

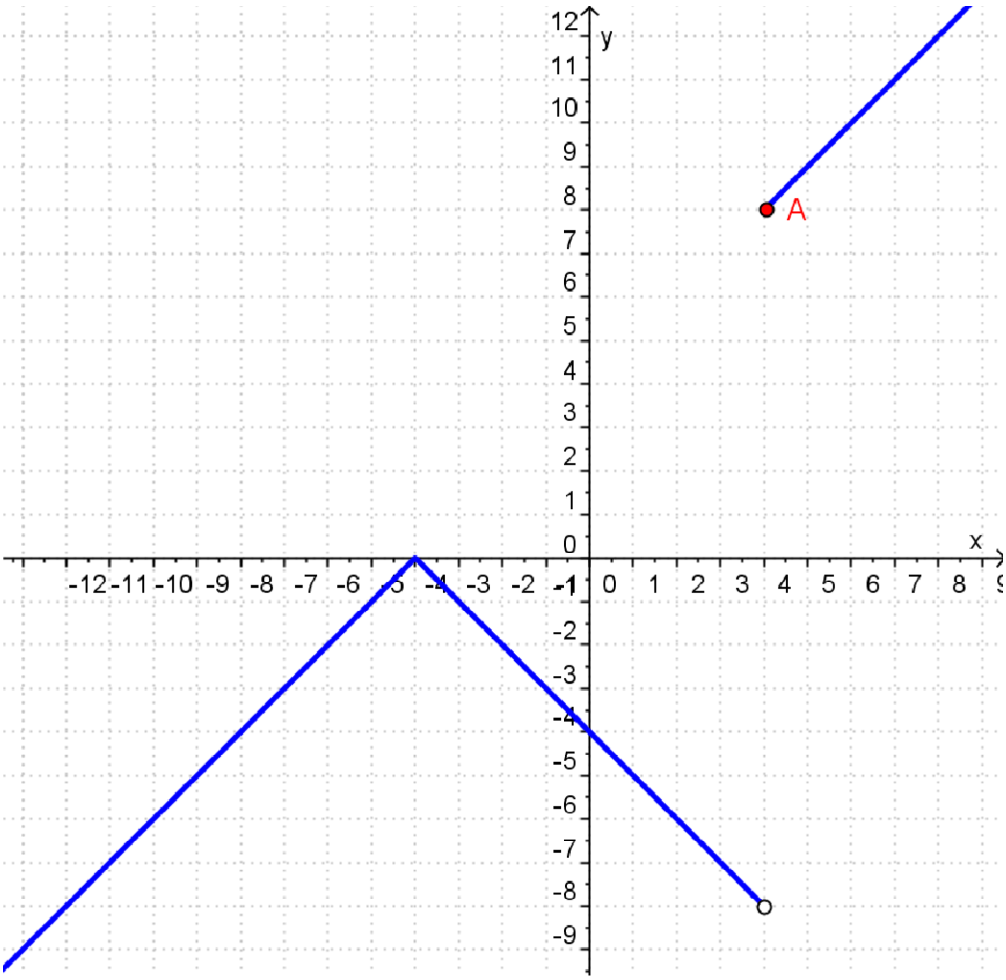
$$f(x) = \frac{|x^2-16|}{x-4} = \begin{cases} \frac{+(x^2-16)}{x-4} & se \quad x^2-16 \geq 0 \\ \frac{-(x^2-16)}{x-4} & se \quad x^2-16 < 0 \end{cases}$$ cioè: $$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} & se \quad x \leq -4 \ \vee \ x \geq 4 \\ \frac{-(x+4)(x-4)}{x-4} & se \quad -4 < x < 4 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} +x+4 & se \quad x \leq -4 \ \vee \ x \geq 4 \\ -x-4 & se \quad -4 < x < 4 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite destro e il limite sinistro della funzione per $x \to 4$.

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{|x^2-16|}{x-4} = \lim_{x \to 4^+} (x+4) = 8 \qquad \lim_{x \to 4^-} \frac{|x^2-16|}{x-4} = \lim_{x \to 4^-} (-x-4) = -8$$

Poiché il limite destro e il limite sinistro esistono finiti e sono diversi, $x = 4$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto della funzione vale $|l^+ - l^-| = |8-(-8)| = 16$.



Individua i punti di dicontinuità della funzione $f(x) = \frac{|x^2-25|}{x-5}$ e la relativa specie.

Il dominio della funzione è $D = \{x \in R \ / \quad x \neq 5\}$

La funzione è il quoziente di due funzioni continue. I suoi punti di discontinuità sono i punti in cui si annulla il denominatore. In questo caso $x = 5$ è un punto di discontinuità della funzione.

Stabiliamo il tipo di discontinuità.

La funzione può essere esplicitata nella forma:

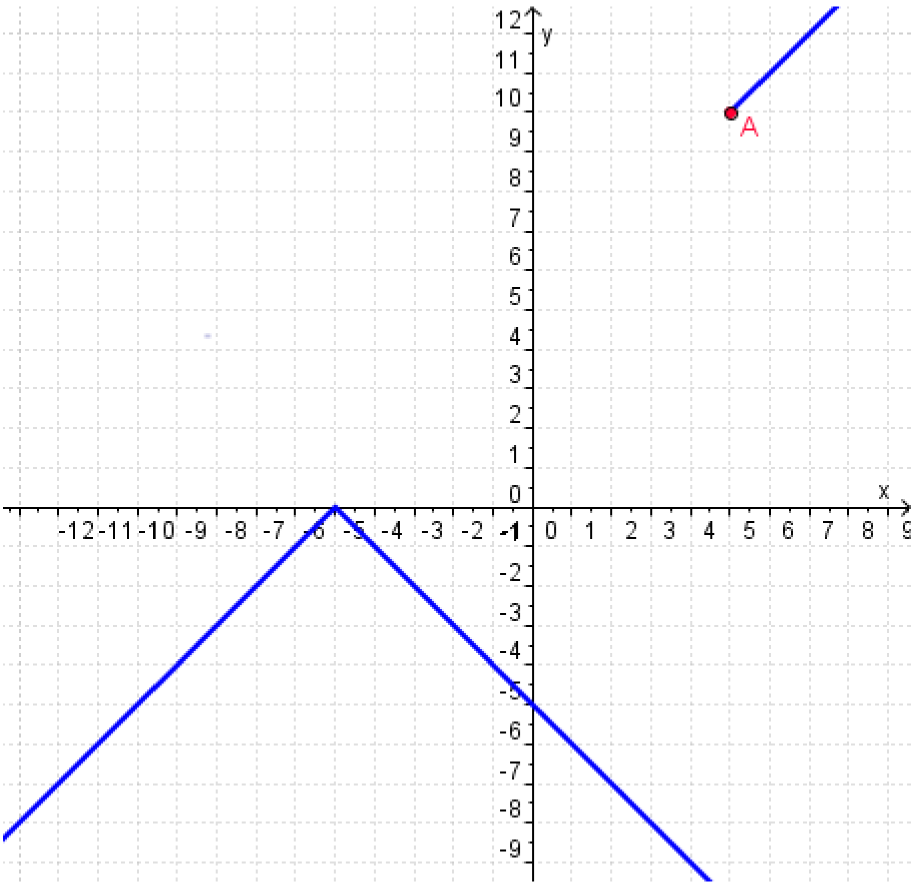
$f(x) = \frac{|x^2-25|}{x-5} = \begin{cases} \frac{+(x^2-25)}{x-5} & se \quad x^2 - 25 \geq 0 \\ \frac{-(x^2-25)}{x-5} & se \quad x^2 - 25 < 0 \end{cases}$ cioè: $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} & se \quad x \leq -5 \ \vee \ x \geq 5 \\ \frac{-(x+5)(x-5)}{x-5} & se \quad -5 < x < 5 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} +x+5 & se \quad x \leq -5 \ \vee \ x \geq 5 \\ -x-5 & se \quad -4 < x < 5 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite destro e il limite sinistro della funzione per $x \to 5$.

$\lim_{x \to 5^+} \frac{|x^2-25|}{x-5} = \lim_{x \to 5^+} (x+5) = 10$ $\qquad$ $\lim_{x \to 5^-} \frac{|x^2-25|}{x-5} = \lim_{x \to 5^-} (-x-5) = -10$

Poiché il limite destro e il limite sinistro esistono finiti e sono diversi, $x = 5$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto della funzione vale $|l^+ - l^-| = |10 - (-10)| = 20$.



Individua i punti di dicontinuità della funzione $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{2x-6}$ e la relativa specie.

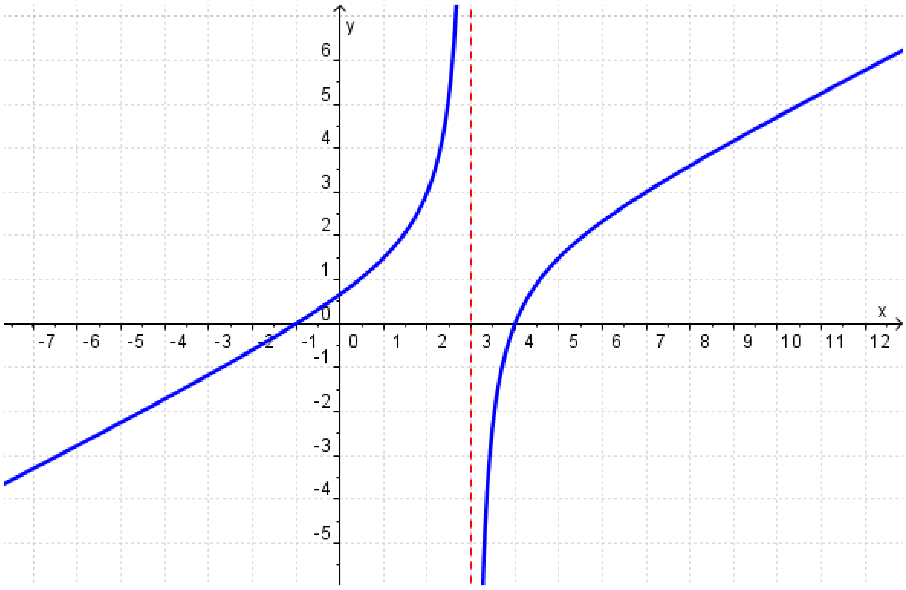
Il dominio della funzione è $D = \{x \in R \ / \quad x \neq 3\}$

La funzione è il quoziente di due funzioni continue. I suoi punti di discontinuità sono i punti in cui si annulla il denominatore. In questo caso $x = 3$ è un punto di discontinuità della funzione.

Stabiliamo il tipo di discontinuità, calcolando il limite destro e il limite sinistro della funzione per $x \to 3$.

$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-3x-4}{2x-6} = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-3x-4}{2x-6} = +\infty$

Poiché il limite destro e il limite sinistro sono infiniti, $x = 3$ è un punto di discontinuità di seconda specie.



Individua i punti di dicontinuità della funzione $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}$ e la relativa specie.

Il dominio della funzione è $D = \{x \in R \ / \quad x \neq 1 \quad \wedge \quad x_2 \neq -3\,\}$

La funzione è il quoziente di due funzioni continue. I suoi punti di discontinuità sono i punti in cui si annulla il denominatore. In questo caso $x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = -3$ sono punti di discontinuità della funzione.

Stabiliamo il tipo di discontinuità in $x_1 = 1$, calcolando il limite destro e il limite sinistro della funzione per $x \to 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3} = \frac{0}{0} = ? \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+4}{x+3} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3} = \frac{0}{0} = ? \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+4}{x+3} = \frac{5}{4}$$

Da cui si ottiene:

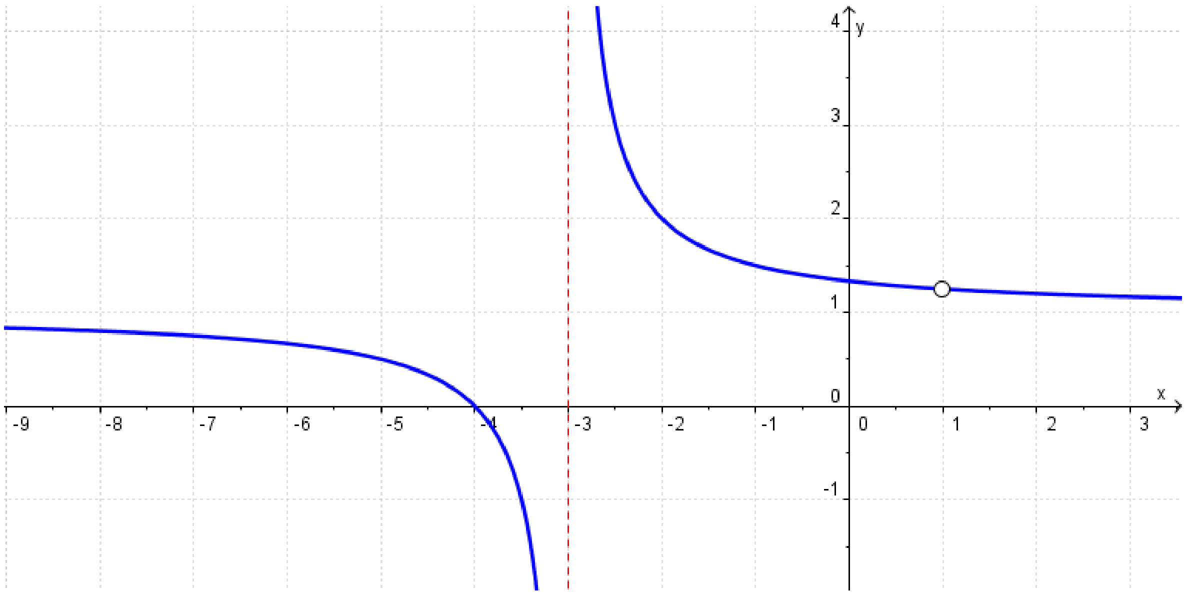
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3} = \frac{5}{4}$$

Poiché esiste ed è finito il limite della funzione $f(x)$ per $x \to 1$ e $f(x)$ non è definita in tale punto, si conclude che $x = 1$ è un punto di discontinuità di terza specie (o eliminabile).

Stabiliamo il tipo di discontinuità in $x_2 = -3$, calcolando il limite destro e il limite sinistro della funzione per $x \to -3$

$$\lim_{x\to -.3^+} \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3} = +\infty \qquad \lim_{x\to -.3^-} \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3} = -\infty$$

Poiché il limite destro e il limite sinistro sono infiniti, $x = -3$ è un punto di discontinuità di seconda specie.



Determina i valori dei parametri affinchè la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & se\ \ x \leq -3 \\ ax + b & se\ -3 < x \leq 2 \\ x^3 + a & se\ \ x > 2 \end{cases}$ sia continua in tutto R.

La funzione definita a tratti $f(x)$ è continua nei tre intervalli $]-\infty, -3]$, $]-3, 2]$ e $[2, +\infty[$ perché in questi intervalli le funzioni considerate sono continue.

Determinamo i valori dei parametri per i quali la funzione $f(x)$ è continua anche nei punti di confine -3 e 2 .

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} (x^2 + x - 6) = 0$ $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} (ax + b) = -3a + b$	$\Rightarrow$	Affinchè sia continua, deve risultare: $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ $-3a + b = 0$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax + b) = 2a + b$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^3 + a) = 8 + a$	$\Rightarrow$	Affinchè sia continua, deve risultare: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ $8 + a = 2a + b$

Le due condizioni si devono verificare simultaneamente, quindi:

$\begin{cases} -3a + b = 0 \\ 8 + a = 2a + b \end{cases}$ $\begin{cases} b = 3a \\ - \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ 8 + a = 2a + 3a \end{cases}$

$\begin{cases} - \\ 4a = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} - \\ a = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 6 \\ a = 2 \end{cases}$

La funzione è continua in tutto R se $a = 2$ e $b = 6$.

La funzione $g(x)$ continua è: $g(x) = \begin{cases} x^2 + x - 6 & se\ \ x \leq -3 \\ 2x + 6 & se\ -3 < x \leq 2 \\ x^3 + 2 & se\ \ x > 2 \end{cases}$