LIMITI
Esercizi

Limite della funzione polinomiale	*con forma indeterminata* $+\infty - \infty = ?$

Per calcolare il limite di una funzione polinomiale $\lim_{x\to+\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n) =$

occorre raccogliere il termine di grado più alto x^n*:* $= \lim_{x\to+\infty} x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n}\right)$

Essendo: $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n}\right) = 0 + 0 + ... + 0 = 0$

si ottiene: $\lim_{x\to+\infty} x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + ... + \frac{a_n}{x^n}\right) = \lim_{x\to+\infty} a_0x^n$

Si conclude pertanto che:

Il limite di una funzione polinomiale per $x \to +\infty$ è dato dal limite del termine di grado massimo
$\lim_{x\to+\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to+\infty} a_0x^n$

Il procedimento è valido anche per i limiti di funzioni per $x \to -\infty$.

Esempio 1

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3x^4 + 5) = (+\infty - \infty = ?)$$

Per eliminare la forma indeterminata raccogliamo il termine di grado più alto.

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 \cdot \left(\frac{1}{x^2} - 3 + \frac{5}{x^4}\right) = -\infty \qquad \textit{perchè} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^4} = 0$$

Oppure

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3x^4 + 5) = \lim_{x\to+\infty} (-3x^4) = -3 \cdot (+\infty) = +\infty .$$

Esempio 2

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 4x^3 + 2x + 5) = (+\infty - \infty = ?)$$

Per eliminare la forma indeterminata raccogliamo il termine di grado più alto.

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 4x^3 + 2x + 5) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{x} - 4 + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} (-4x^3) = -\infty .$$

Oppure

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 4x^3 + 2x + 5) = \lim_{x\to+\infty} (-4x^3) = -4 \cdot (+\infty) = -\infty .$$

Esempio 3

$$\lim_{x\to-\infty} (1 - 2x^3 + 2x) = (+\infty - \infty = ?)$$

Per eliminare la forma indeterminata raccogliamo il termine di grado più alto.

$$\lim_{x\to-\infty} (1 - 2x^3 + 2x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{x^3} - 2 + \frac{2}{x}\right) = (-\infty) \cdot (-2) = +\infty .$$

Oppure

$$\lim_{x\to-\infty} (1 - 2x^3 + 2x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^3) = (-2) \cdot (-\infty) = +\infty .$$

Per calcolare il limite di una funzione razionale fratta $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_{p-1}x + b_p}$

occorre raccogliere il termine di grado più alto al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^p \cdot \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_p}{x^p}\right)}$$

Essendo: $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = 0$ *e* $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_p}{x^p}\right) = 0$

Si ottiene il limite nella forma equivalente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n \cdot \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^p \cdot \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_p}{x^p}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_0\, x^n}{b_0\, x^p}$

Si conclude pertanto che:

Il limite di una funzione razionale fratta per $x \to +\infty$ è dato dal limite del rapporto dei termini di grado massimo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \ldots + b_{p-1}x + b_p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_0\, x^n}{b_0\, x^p} = \begin{cases} \pm\infty & se \quad n > p \\ 0 & se \quad n < p \\ \frac{a_0}{b_0} & se \quad n = p \end{cases}$$

Il metodo è valido anche per i limiti di funzioni per $x \to -\infty$.

Esempio 1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 + 2x - 1}{5 - 2x^4 - 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 \cdot \left(3 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{x^4 \cdot \left(\frac{5}{x^4} - 2 - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{\frac{5}{x^4} - 2 - \frac{3}{x^2}} = -\frac{3}{2}.$$

Oppure considerare gli infiniti di ordine superiore.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^4 - 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4}{-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Esempio 2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 - 1}{5 - 2x^3 - 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 \cdot \left(3 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^4}\right)}{x^3 \cdot \left(\frac{5}{x^3} - 2 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot \left(3 - \frac{5}{x} - \frac{1}{x^4}\right)}{\frac{5}{x^3} - 2 - \frac{3}{x}} = \frac{+\infty \cdot (3)}{-2} = -\infty .$$

Oppure considerare gli infiniti di ordine superiore.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 5x^3 - 1}{5 - 2x^3 - 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4}{-2x^3} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3x}{2} = -\infty .$$

Esempio 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 5x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^4 - 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \cdot \left(\frac{3}{x} - 5 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^4 \cdot \left(\frac{5}{x^4} - 2 - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{x} - 5 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{x \cdot \left(\frac{5}{x^4} - 2 - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{-5}{+\infty \cdot (-2)} = 0 .$$

Oppure considerare gli infiniti di ordine superiore.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 5x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^4 - 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^3}{-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2x} = 0 .$$

Limite della funzione razionale fratta	*con forma indeterminata* $\frac{0}{0} = ?$

Per calcolare il limite di una funzione razionale fratta che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0} = ?$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots + b_{p-1} x + b_p} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

occorre:

1. **scomporre in fattori i due polinomi** (*con il metodo di Ruffini si dividono i due polinomi per il binomio* $x - x_0$)
2. **semplificare il binomio** $x - x_0$ **.**

Se $x \to 0$	**occorre raccogliere a fattor comune il termine di grado più basso.** oppure **considerare gli infinitesimi di ordine minore.**

Esempio 1

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \lim_{x \to 2} \frac{3x \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x}{(x+2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Esempio 2

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{4 - x^2} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{(2+x) \cdot (2-x)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(2-x) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{(2+x) \cdot (2-x)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-x^2 - 2x - 4}{2 + x} = \frac{-12}{4} = -3 .$$

Esempio 3

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{2x^4 - 5x^3 + 8} = \left(\frac{0}{0} = ?\right) =$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

	1	0	−3	0	−4
2		+2	+4	+2	+4
	1	+2	+1	+2	=

	2	−5	0	0	+8
2		+4	−2	−4	−8
	2	−1	−2	−4	=

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2) \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 2)}{(x-2) \cdot (2x^3 - x^2 - 2x - 4)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{2x^3 - x^2 - 2x - 4} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 + 2}{2 \cdot 2^3 - 2^2 - 2 \cdot 2 - 4} = \frac{20}{4} = 5.$$

Esempio 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x}{3x^2 - 4x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Quando $x \to 0$ occorre raccogliere a fattor comune il termine di grado più basso.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (x-5)}{x \cdot (3x-4)} = \lim_{x \to 0} \frac{x-5}{3x-4} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}.$$

Oppure considerare gli infinitesimi di ordine minore.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x}{3x^2 - 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{-5x}{-4x} = \lim_{x \to 0} \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}.$$

Esempio 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 - 9x^2}{4x^3 - 2x} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Quando $x \to 0$ occorre raccogliere a fattor comune il termine di grado più basso.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 - 9x^2}{4x^3 - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot (x^6 - 9x)}{x \cdot (4x^2 - 2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6 - 9x}{4x^2 - 2} = \frac{0}{-2} = 0 \,.$$

Oppure considerare gli infinitesimi di ordine minore.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 - 9x^2}{4x^3 - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-9x^2}{-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{9x}{2} = \frac{0}{2} = 0\,.$$

Esempio 6

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 5x^2}{3x^6 - 2x^3} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Quando $x \to 0$ occorre raccogliere a fattor comune il termine di grado più basso.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 5x^2}{3x^6 - 2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot (x^2 - 5)}{x^2 \cdot (3x^4 - 2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 5}{3x^4 - 2x} = \frac{-5}{0} = \infty \,.$$

Oppure considerare gli infinitesimi di ordine minore.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4 - 5x^2}{3x^6 - 2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-5x^2}{-2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{2x} = \frac{5}{0} = \infty\,.$$

Esempio 7

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 - 5x^2}{3x^6 - 2x^3} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Quando $x \to 0$ occorre raccogliere a fattor comune il termine di grado più basso.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 - 5x^2}{3x^6 - 2x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \cdot (x^2 - 5)}{x^2 \cdot (3x^4 - 2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 5}{3x^4 - 2x} = \frac{0{,}1^2 - 5}{3(0{,}1)^4 - 2(0{,}1)} = \frac{-4{,}99}{0^-} = +\infty \,.$$

Oppure considerare gli infinitesimi di ordine minore.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 - 5x^2}{3x^6 - 2x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-5x^2}{-2x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5}{2x} = \frac{5}{0^+} = +\infty\,.$$

Esempio 8

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^4 - 5x^2}{3x^6 - 2x^3} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Quando $x \to 0$ occorre raccogliere a fattor comune il termine di grado più basso.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^4 - 5x^2}{3x^6 - 2x^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 \cdot (x^2 - 5)}{x^2 \cdot (3x^4 - 2x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 5}{3x^4 - 2x} = \frac{0{,}1^2 - 5}{3(-0{,}1)^4 - 2(-0{,}1)} = \frac{-4{,}99}{0^+} = -\infty \,.$$

Oppure considerare gli infinitesimi di ordine minore.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^4 - 5x^2}{3x^6 - 2x^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-5x^2}{-2x^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{5}{2x} = \frac{5}{0^-} = -\infty\,.$$