LIMITI

Funzioni irrazionali

Limiti di funzioni irrazionali	*con forma indeterminata* $+\infty - \infty = ?$

In generale:

- **Se i termini di grado massimo sono <u>diversi</u> si esegue il raccoglimento a fattor comune.**
- **Se i termini di grado massimo sono <u>uguali</u> si esegue la razionalizzazione.**

Esempio 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right) \quad = \quad (+\infty-\infty=?)$$

I termini di grado massimo sono diversi: $\left(\sqrt{x^2}=x\right) \neq (2x) \quad \Rightarrow \quad$ *si esegue il raccoglimento a fattor comune.*

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}-2x\right) \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2x\right) \quad =$$

Ricordando che : $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}+x & se\ x\geq 0\\ -x & se\ x<0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}|x| = \lim\limits_{x\to+\infty}(+x)\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}|x| = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\end{cases}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(+x\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2x\right) \quad = \quad \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-2\right) \quad = -\infty$$

perchè $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ *quindi la parentesi tende a* -1. *Pertanto il limite vale:* $+\infty\cdot(-1)=-\infty$.

Esempio 2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}\right) \quad = \quad (+\infty-\infty=?)$$

I termini di grado massimo sono uguali: $(x) \ = \ (x) \quad \Rightarrow \quad$ *si esegue la razionalizzazione.*

Moltiplichiamo e dividiamo per il coniugato dell'espressione $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}$ *:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}\right) \quad = \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}\right)} \quad =$$

Ricordando il prodotto notevole: $(I-II)(I+II)=I^2-II^2$ *si ottiene:*

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x-5}\right)^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3-(x-5)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-5}} = \frac{-2}{+\infty} = 0\,.$$

Se procedessimo come prima, otterremmo la forma indeterminata $+\infty\cdot 0$ *:*

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-5}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-\frac{5}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1-\frac{5}{x}}\right) = (+\infty\cdot 0=?)$$

Esempio 3

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right) = (+\infty-\infty=?)$$

I termini di grado massimo sono uguali: $\left(\sqrt{4x^2}=2x\right) = (2x) \Rightarrow$ *si esegue la razionalizzazione.*

Moltiplichiamo e dividiamo per il coniugato dell'espressione $\sqrt{4x^2+3}-2x$ *:*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)} =$$

Ricordando il prodotto notevole: $(I-II)(I+II)=I^2-II^2$ *si ottiene:*

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+3}\right)^2-(2x)^2}{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+3-4x^2}{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{4x^2+3}+2x\right)} = 0\,.$$

Se procedessimo come nell'esempio 1, otterremmo la forma indeterminata $+\infty\cdot 0$ *:*

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}-2\right) = (+\infty\cdot 0=?)$$

Esempio 4

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) = (+\infty-\infty=?)$$

I termini di grado massimo sono uguali: $\left(\sqrt{x^2}=x\right) = (x) \Rightarrow$ *si esegue la razionalizzazione.*

Moltiplichiamo e dividiamo per il coniugato dell'espressione $\sqrt{x^2+x+1}+x$ *:*

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} =$$

Compare ancora una forma indeterminata $\frac{-\infty}{+\infty-\infty}$.

Per eliminare l'indeterminazione, raccogliamo a fattor comune x sia a numeratore sia a denominatore:

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty}-\frac{1+\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Esempio 5

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2x-\sqrt{9x^2+3}} = \left(\frac{5}{+\infty-\infty}=?\right)$$

I termini di grado massimo sono diversi: $(2x) \neq \left(\sqrt{9x^2}=3x\right) \Rightarrow$ *si esegue il raccoglimento a fattor comune.*

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2x-\sqrt{x^2\left(9+\frac{3}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2x-\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2x-(+x)\cdot\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x\cdot\left(2-\sqrt{9+\frac{3}{x^2}}\right)} = 0\,.$$

perchè $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ *quindi il denominatore tende a* $(+\infty)\cdot(-1)=-\infty$ *si conclude che la frazione tende a* 0 .

Esempio 6

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2x-\sqrt{4x^2+3}} = \left(\frac{5}{+\infty-\infty}=?\right)$$

I termini di grado massimo sono uguali: $\left(\sqrt{4x^2}=2x\right) = (2x) \Rightarrow$ *si esegue la razionalizzazione.*

Moltiplichiamo e dividiamo per il coniugato dell'espressione $2x-\sqrt{4x^2+3}$ *:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2x-\sqrt{4x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2x-\sqrt{4x^2+3}} \cdot \frac{2x+\sqrt{4x^2+3}}{2x+\sqrt{4x^2+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right)}{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2+3}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right)}{4x^2-(4x^2+3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right)}{-3} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{5}{3}\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right) = -\infty \; .$$

perchè $\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right) = +\infty+\infty = +\infty$.

Esempio 7

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{5x+7}\right) = (+\infty-\infty=?)$$

I termini di grado massimo sono diversi: $(3x) \neq (5x) \Rightarrow$ *si esegue il raccoglimento a fattor comune.*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{5x+7}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x\cdot\left(3-\frac{2}{x}\right)}-\sqrt{x\cdot\left(5+\frac{7}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{3-\frac{2}{x}}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{5+\frac{7}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3-\frac{2}{x}}-\sqrt{5+\frac{7}{x}}\right) = +\infty\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\infty \, .$$

perchè $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cong 0{,}45-0{,}58 \cong -013$.

II METODO *(consideriamo inizialmente gli infiniti di ordine superiore e in seguito il raccoglimento a fattor comune)*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{5x+7}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x}-\sqrt{5x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) = -\infty \, .$$

perchè $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ *è un numero negativo .*

Esempio 8

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{3x^2-5}-\sqrt[3]{3x^2+7x}\right) = (+\infty-\infty=?)$$

I termini di grado massimo sono uguali: $(3x^2) = (3x^2) \Rightarrow$ *si esegue la razionalizzazione.*

Ricordando il prodotto notevole: $(I-II)(I^2+I\cdot II+II^2)=I^3-II^3$

Moltiplichiamo e dividiamo per il falso quadrato $I^2+I\cdot II+II^2$ *:*

$$= \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{3x^2-5}-\sqrt[3]{3x^2+7x}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(3x^2-5)^2}+\sqrt[3]{3x^2-5}\cdot\sqrt[3]{3x^2+7x}+\sqrt[3]{(3x^2+7x)^2}}{\sqrt[3]{(3x^2-5)^2}+\sqrt[3]{3x^2-5}\cdot\sqrt[3]{3x^2+7x}+\sqrt[3]{(3x^2+7x)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt[3]{(3x^2-5)^3}-\sqrt[3]{(3x^2+7x)^3}}{\sqrt[3]{(3x^2-5)^2}+\sqrt[3]{3x^2-5}\cdot\sqrt[3]{3x^2+7x}+\sqrt[3]{(3x^2+7x)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{(3x^2-5)-(3x^2+7x)}{\sqrt[3]{(3x^2-5)^2}+\sqrt[3]{3x^2-5}\cdot\sqrt[3]{3x^2+7x}+\sqrt[3]{(3x^2+7x)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-7x-5}{\sqrt[3]{(3x^2-5)^2}+\sqrt[3]{3x^2-5}\cdot\sqrt[3]{3x^2+7x}+\sqrt[3]{(3x^2+7x)^2}} = 0\,.$$

perché il grado del numeratore (1) *è minore del grado del denominatore* $\left(\frac{4}{3}\right)$.

Oppure considerando gli infiniti di ordine superiore si ha:

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-7x}{\sqrt[3]{(3x^2)^2}+\sqrt[3]{3x^2}\cdot\sqrt[3]{3x^2}+\sqrt[3]{(3x^2)^2}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-7x}{3^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-7x}{3\cdot 3^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-7}{3^{\frac{5}{3}}x^{\frac{1}{3}}} = \frac{-7}{+\infty} = 0\,.$$

Esempio 1

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Ricordando il prodotto notevole: $(I+II)(I-II) = I^2 - II^2$

Moltiplichiamo e dividiamo per il coniugato di $\sqrt{x}-2$ *:*

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Esempio 2

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Moltiplichiamo e dividiamo per il coniugato di $\sqrt{x}-2$ *:*

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}^2-2^2}{(x^2-3x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x^2-3x-4)\cdot(\sqrt{x}+2)} =$$

e effettuiamo la scomposizione in fattori del polinomio che da origine alla forma indeterminata:

	1	−3	−4
4		+4	+4
	1	+1	=

$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)\cdot(x+1)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+1)\cdot(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{20}.$$

Esempio 3

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{3-\sqrt{8-x^3}} = \left(\frac{0}{0} = ?\right)$$

Moltiplichiamo e dividiamo per il coniugato di $\sqrt{x^2+3}-2$ *e per il coniugato di* $3-\sqrt{8-x^3}$ *:*

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{3-\sqrt{8-x^3}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} \cdot \frac{3+\sqrt{8-x^3}}{3+\sqrt{8-x^3}} = \lim_{x\to -1} \frac{\left(\sqrt{(x^2+3)^2}-2^2\right)\cdot\left(3+\sqrt{8-x^3}\right)}{\left(3^2-\sqrt{(8-x^3)^2}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+3-4)\cdot\left(3+\sqrt{8-x^3}\right)}{[9-(8-x^3)]\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-1)\cdot\left(3+\sqrt{8-x^3}\right)}{[x^3+1]\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

Scomponiamo in fattori: $x^2-1 = (x+1)\cdot(x-1)$ *e* $x^3+1 = (x+1)\cdot(x^2-x+1)$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(3+\sqrt{8-x^3}\right)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)\cdot\left(3+\sqrt{8-x^3}\right)}{(x^2-x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{-2\cdot(3+3)}{3\cdot 4} = -1.$$

Esempio 4

$$\boldsymbol{\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}} = \left(\frac{0}{0}=?\right)$$

Ricordando il prodotto notevole: $(I+II)(I^2 - I\cdot II + II^2) = I^3 + II^3$

Moltiplichiamo e dividiamo per il falso quadrato $I^2 + I\cdot II + II^2$ *:*

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2} = \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3}+1^3}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 5

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{3x^2-4x+1}{x^2+x-2}\right)^{\frac{1}{1-x}}} = \left(\frac{0}{0}=?\right)$$

Effettuiamo la scomposizione in fattori dei polinomi che danno origine alla forma indeterminata:

$$3x^2-4x+1 = 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1) = (3x-1)(x-1)$$

$$3x^2-4x+1=0\,; \quad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (-2)^2 - 3\cdot 1 = 1\,; \quad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{2\mp\sqrt{1}}{3} = \begin{matrix} x_1 = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{2+1}{3} = 1 \end{matrix}$$

	1	+1	−2
1		+1	+2
	1	+2	=

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{3x^2-4x+1}{x^2+x-2}\right)^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{(3x-1)(x-1)}{(x-1)(x+2)}\right)^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{1-x}} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{0^-}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty} = \left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty} = +\infty$$

Esempio 1

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} = ?\right)$$

Si esegue il raccoglimento a fattor comune dei termini di grado più alto al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = = \lim_{x\to+\infty} \frac{+x\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{5}{x}} = \frac{1}{2}.$$

perchè $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ ***e*** $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = 0$

Esempio 2

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+5x-2}{\sqrt{4x^2+3}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} = ?\right)$$

Si esegue il raccoglimento a fattor comune dei termini di grado più alto al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{|x|\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{-x\cdot\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} = -\infty.$$

perchè $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^3} = 0$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = 0$

Quindi, il numeratore tende a $+\infty$ *mentre il denominatore tende a* -2 *, si conclude che la frazione tende a* $-\infty$.

Esempio 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x^2+3x-6}}{7x^2+2x+4} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} = ?\right)$$

Si esegue il raccoglimento a fattor comune dei termini di grado più alto al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\cdot\left(5+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}}{x^2\cdot\left(7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{5+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x^2\cdot\left(7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\cdot\sqrt{5+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x^2\cdot\left(7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{+x\cdot\sqrt{5+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x^2\cdot\left(7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x\cdot\left(7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = 0$$

perchè $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{6}{x^2} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2} = 0$

Quindi, il numeratore tende a $\sqrt{5}$ *, mentre il denominatore tende a* $+\infty$ *, si conclude che la frazione tende a* 0 *.*

Esempio 4

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{1+\sqrt{x^2+1}}}{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}=?\right)$$

Si esegue il raccoglimento a fattor comune dei termini di grado più alto al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 1\,.$$

perché $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ *e* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

Oppure

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 1\,.$$

Esempio 5

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathbf{1+\sqrt{3x^2-5}}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}=?\right)$$

Si esegue il raccoglimento a fattor comune dei termini di grado più alto al numeratore e al denominatore:

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{x^2\left(3-\frac{5}{x^2}\right)}}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{3-\frac{5}{x^2}}}{2x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+(-x)\cdot\sqrt{3-\frac{5}{x^2}}}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{\sqrt{3-\frac{5}{x^2}}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

perché $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$ *e* $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0$